dr Arkadiusz Misztela
Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego
E-mail: arkadiusz.misztela@usz.edu.pl

Reprezentacje wypukłych hamiltonianów o podliniowym wzroście

Równanie Hamiltona–Jacobiego

$$\begin{aligned} -V_t(t,x) + H(t,x,-V_x(t,x)) = 0 \quad & \text{na } (0,T)\times\mathbb{R}^n \\ V(T,x) = g(x) \quad & \text{na } \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{1}$$

z wypukłym hamiltonianem w zmiennej gradientu można opisać używając funkcji wartości, pochodzącej z teorii rachunku wariacyjnego, która jest definiowana wzorem

$$\bar{V}(t,x) = \inf_{\substack{z(\cdot)\in W^{1,1}([t,T],\mathbb{R}^n)\\ z(t)=x}} \Big\{ g(z(T)) + \int_t^T H^*(s,z(s),\dot{z}(s))\,ds \Big\},$$

gdzie $H^*(t,x,\cdot)$ jest sprzężeniem Legendre'a–Fenchela $H(t,x,\cdot)$. Równanie (1) również można opisać używając funkcji wartości pochodzącej z teorii sterowania optymalnego, pod warunkiem, że istnieje odpowiednio regularna trójka (A,f,l) spełniająca równość

$$H(t,x,p) = \sup_{a\in A}\{\, \langle p, f(t,x,a)\rangle - l(t,x,a)\,\}. \tag{2}$$

Dysponując trójką (A,f,l), funkcję wartości można zdefiniować wzorem

$$\tilde{V}(t,x) = \inf_{a(\cdot)} \Big\{ g(z_a(T)) + \int_t^T l(s,z_a(s),a(s))\,ds \Big\},$$

gdzie $a(\cdot)$ jest sterowaniem o wartościach w zbiorze A, zaś $z_a(\cdot)$ rozwiązaniem równania

$$\dot{z}_a(s) = f(s,z_a(s),a(s)), \text{ dla p.w. } s\in[t,T], \text{ takim, że } z_a(t)=x.$$

Trójkę (A,f,l) spełniającą równość (2) będziemy nazywać reprezentacją hamiltonianu H. Podczas wykładu przedstawimy nową konstrukcję reprezentacji pochodzącą z artykułów [1], [2]. Następnie porównamy ją z konstrukcjami występującymi w literaturze. W końcu uzasadnimy, że zdefiniowane powyżej funkcje wartości $\bar{V}$ i $\tilde{V}$ są równe, oraz wskażemy związek między trajektoriami optymalnymi w zagadnieniach rachunku wariacyjnego a sterowaniami optymalnymi w zagadnieniach teorii sterowania.

Bibliografia

[1] A. Misztela, *Representation of Hamilton–Jacobi equation in optimal control theory with compact control set*, SIAM J. Control Optim. 57 (2019), 53–77.

[2] A. Misztela, *Representation of Hamilton–Jacobi equation in optimal control theory with unbounded control set*, J. Optim. Theory Appl. 185 (2020), 361–383.