Leszek Plaskota
Uniwersytet Warszawski
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki
E-mail: `leszekp@mimuw.edu.pl`

W poszukiwaniu wszystkich zer funkcji gładkich

Rozpatrujemy zadanie znalezienia *wszystkich* rozwiązań równania

$$f(x) = 0$$

w przestrzeni $F_{r,\varrho}(0,1)$ funkcji $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ takich, że $f^{(r)}$ $(r \geqslant 0)$ istnieje i jest hölderowsko ciągła z wykładnikiem $\varrho \in (0,1]$, na podstawie wartości funkcji f lub jej pochodnych w n punktach. Błąd pomiędzy rzeczywistym zbiorem rozwiązań $Z(f)$ a jego aproksymacją $Z_n(f)$ mierzy się za pomocą metryki Hausdorffa $d_H(Z(f), Z_n(f))$.

Pokazujemy, że o ile błąd aproksymacji w przypadku najgorszym dla każdego n wynosi $+\infty$, to istnieje algorytm zbiegający do rozwiązania, gdy $n \to +\infty$, dla każdej funkcji $f \in F_{r,\varrho}(0,1)$. Jednak zbieżność może być dowolnie wolna. Dokładniej, dla dowolnego ciągu aproksymacji $\{Z_n\}_{n\geqslant 1}$ używających n adaptacyjnie wybranych wartości funkcji lub jej pochodnych i dla dowolnego dodatniego ciągu $\{\tau_n\}_{n\geqslant 1}$ zbiegającego do zera istnieją funkcje $f \in F_{r,\varrho}(0,1)$ takie, że

$$\sup_{n\geqslant 1} \tau_n^{-1} d_H(Z(f), Z_n(f)) = +\infty.$$

Dodatkowo, to ograniczenie dolne zachodzi nawet wtedy, gdy ograniczymy się do funkcji mających dokładnie jedno zero.

Powyższe wyniki znajdują uogólnienia dla funkcji wielu zmiennych, a także pozostają w mocy dla innych zadań, takich jak poszukiwanie punktów stałych czy globalnych minimów.