Radosław Wieczorek
Uniwersytet Śląski, Instytut Matematyki
Katowice
E-mail: radoslaw.wieczorek@us.edu.pl

Zbieżność do rozwiązań deltowych w modelach ze strukturą wiekową i dojrzałościową

Celem niniejszego referatu jest przedstawienie dwóch modeli populacyjnych opisanych prostymi nieliniowym równaniami transportu, których rozwiązania zbiegają przy czasie dążącym do nieskończoności do poruszających się delt Diraca.

Pierwszy z modeli dotyczy organizmów semelparycznych. Gatunek nazywamy semelparycznym, jeżeli osobniki tego gatunku rozmnażają się tylko raz w życiu (i zwykle wkrótce potem umierają). Rozważamy tylko takie gatunki, które mają dodatkowo stałą długość życia m. Model zadany jest nieliniowym równaniem typu McKendricka postaci

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial a} = -\mu(a)u \\ &u(t,0) = \beta(N(t))u(t,m) \end{aligned}$$

gdzie $N(t) = \int_0^m u(t,a)da$. Równanie to posiada jedyne dodatnie rozwiązanie stacjonarne — w pewnych przypadkach niestabilne. Istnieje natomiast cała klasa nieklasycznych rozwiązań okresowych, będących miarami singularnymi. Można pokazać, że przy pewnych założeniach o warunku początkowym rozwiązania klasyczne zbiegają w sensie miarowym do poruszającej się miary singularnej (kombinacji delt Diraca).

Drugi model opisuje populację komórek drożdży, w których na skutek oddziaływań biochemicznych następuje synchronizacja cyklu komórkowego. Jest to model populacji ze strukturą dojrzałości komórek, który można w uproszczonej wersji zapisać równaniem

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + g(S,x)\frac{\partial u}{\partial a} = -\mu(x)u, \quad x \in [0,1] \\ &u(t,0) = \beta u(t,1) \end{aligned}$$

gdzie $S(t) = \int_0^1 \sigma(x)u(t,x)dx$ mierzy sygnał chemiczny. Również w tym modelu można zaobserwować zbieżność do poruszającej się kombinacji delt Diraca.