dr Andrzej Just
dr Zdzisław Stempień
Politechnika Łódzka

Nieliniowe zadanie sterowania optymalnego opisane przez pewną klasę równań rozciągliwej belki i jego aproksymacja typu Galerkina

W referacie rozważamy nieliniowe zadanie sterowania optymalnego, które opisane jest rodziną jednowymiarowych równań rozciągliwej belki postaci

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \left[\beta + \gamma \int_0^l \Big(\frac{\partial y(\xi,t)}{\partial \xi}\Big)^2 + \sigma \int_0^l \frac{\partial y(\xi,t)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 y(\xi,t)}{\partial \xi \partial t}\, d\xi\right] \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + f(y)\,\frac{\partial y}{\partial t} + g(y) = h + Bu. \qquad (1)$$

Stałe fizyczne $\alpha, \gamma, \sigma > 0$ i $\beta \in \mathbb{R}$. Zmienna przestrzenna $x \in (0,l)$, czas $t \in S = (0,T)$ dla l, $T < \infty$. Nieliniowe funkcje f, g, h są zadanymi funkcjami, które mają pewne interpretacje fizyczne i spełniają odpowiednie założenia. B jest operatorem liniowym i ciągłym, a u jest funkcją, która pełni rolę parametru sterującego.

Do równania różniczkowego (1) dołączone są warunki brzegowe odpowiadające końcom sztywnym i podpartym belki tzn.

$$y(0,t) = y(l,t) = \frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial y(l,t)}{\partial x} = 0 \qquad \text{dla końców sztywnych belki,} \qquad (2)$$

lub

$$y(0,t) = y(l,t) = \frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y(l,t)}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{dla końców podpartych belki} \qquad (3)$$

oraz warunki początkowe postaci

$$y(x,0) = y_0(x) \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial y(x,0)}{\partial t} = y_1(x). \qquad (4)$$

Rozważamy rozwiązanie zagadnienia początkowo-brzegowego (1)–(4) w słabym sensie. Dla tak sformułowanego zagadnienia granicznego (1)–(4) definiujemy zadanie sterowania optymalnego z funkcjonałem jakości w ogólnej postaci, który w szczególnym przypadku minimalizuje całkowitą energię drgań rozważanej belki.

Przy odpowiednich założeniach dotyczących parametrów równania (1) i funkcjonału jakości dowodzimy, że tak postawione zadanie sterowania optymalnego posiada co najmniej jedno rozwiązanie, które zależy w sposób ciągły od sterowania. Do tak sformułowanego zadania sterowania optymalnego stosujemy skończeniewymiarową aproksymację typu Galerkina względem zmiennej przestrzennej oraz względem przestrzeni sterowań. Następnie dowodzimy twierdzenia o istnieniu rozwiązań optymalnych dla zadań po aproksymacji oraz ich słabej zbieżności do jednego z rozwiązań wyjściowego zadania sterowania w odpowiednich przestrzeniach.