

Kratownice i  
tensegrity z  
niepewnymi  
parametrami.

Pelczyński,  
Gilewski

Kratownice

Czym są kratownice

Opis matematyczny

Tensegrity

Niepewność

Parametry niepewne

W jakim celu?

Perspektywy

# Kratownice i tensegrity z niepewnymi parametrami – zastosowanie aparatu zbiorów wypukłych w mechanice budowli inżynierskich.

J. Pełczyński W. Gilewski

Politechnika Warszawska  
Wydział Inżynierii Lądowej

Zakopane, wrzesień 2016

# Plan

Kratownice i  
tensegrity z  
niepewnymi  
parametrami.

Pelczynski,  
Gilewski

Kratownice

Czym są kratownice

Opis matematyczny

Tensegrity

Niepewność

Parametry niepewne

W jakim celu?

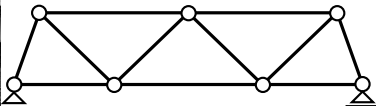
Perspektywy

- 1 Kratownice
  - Czym są kratownice
  - Opis matematyczny
- 2 Tensegrity
- 3 Niepewność
  - Parametry niepewne
  - W jakim celu?
- 4 Perspektywy

# Kratownice

Kratownice i tensegrity z niepewnymi parametrami.

Pelczynski, Gilewski



Kratownice

Czym są kratownice

Opis matematyczny

Tensegrity

Niepewność

Parametry niepewne

W jakim celu?

Perspektywy

Kratownica - konstrukcja składająca się z prętów, które są ściskane lub rozciągane. Nie występuje w nich zginanie. Pręty łączą się w węzłach.



# Kratownice

Kratownice i tensegrity z niepewnymi parametrami.

Pelczynski, Gilewski

Kratownice

Czym są kratownice

Opis matematyczny

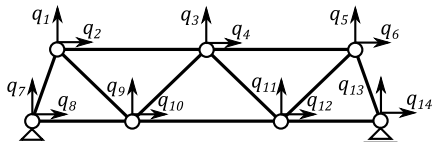
Tensegrity

Niepewność

Parametry niepewne

W jakim celu?

Perspektywy



$n$  - liczba stopni swobody (możliwych przemieszczeń węzłów),  
 $k$  - liczba prętów.

# Równania kratownic

Kratownice i tensegrity z niepewnymi parametrami.

Pelczynski,  
Gilewski

Kratownice

Czym są kratownice

Opis matematyczny

Tensegrity

Niepewność

Parametry niepewne

W jakim celu?

Perspektywy

Związki geometryczne  $\Delta = \mathbf{B}\mathbf{q}$

Związki fizyczne  $\mathbf{S} = \mathbf{D}\Delta$

Równania równowagi  $\mathbf{B}^T\mathbf{S} = \mathbf{P}$

$\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  – poszukiwany wektor przemieszczeń węzłów,

$\mathbf{P} \in \mathbb{R}^n$  – wektor sił działających na węzły,

$\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k \times n}$  – informacja o geometrii,

$\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{k \times k}$  – informacja o materiale (*macierz diagonalna*),

$\mathbf{S} \in \mathbb{R}^k$  – wektor sił normalnych w prętach.

# Równania kratownic

Kratownice i tensegrity z niepewnymi parametrami.

Pelczynski, Gilewski

Kratownice

Czym są kratownice

Opis matematyczny

Tensegrity

Niepewność

Parametry niepewne

W jakim celu?

Perspektywy

Związki geometryczne  $\Delta = Bq$

Związki fizyczne  $S = D\Delta$

Równania równowagi  $B^T S = P$

Układ równań rozwiązujących

$$K_L q = P$$

$$K_L = B^T D B$$

# Tensegrity

Kratownice i tensegrity z niepewnymi parametrami.

Pelczynski,  
Gilewski



Kratownice

Czym są kratownice

Opis matematyczny

Tensegrity

Niepewność

Parametry niepewne

W jakim celu?

Perspektywy

- 1 Szczególny typ kratownicy.
- 2 Występowanie infinitezimalnych ruchów sztywnych (takich, które nie powodują wydłużeń ani skróceń prętów).
- 3 Ruchy sztywne są blokowane przez samospężenia (ang. *self-stress*).
- 4 Macierz  $\mathbf{K}_L$  osobliwa (tyle wartości własnych ile ruchów sztywnych).
- 5 w celu otrzymania jednoznacznego rozwiązania, układ równań rozwiązujących modyfikowany jest następująco:  
 $(\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_G)\mathbf{q} = \mathbf{P}$ .

# Tensegrity

Kratownice i tensegrity z niepewnymi parametrami.

Pelczynski,  
Gilewski

Kratownice

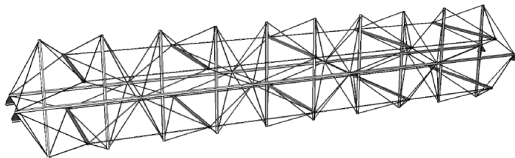
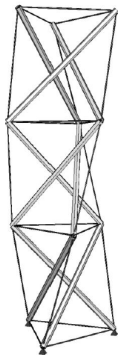
Czym są kratownice  
Opis matematyczny

Tensegrity

Niepewność

Parametry niepewne  
W jakim celu?

Perspektywy





# Niepewność

Kratownice i tensegrity z niepewnymi parametrami.

Pelczynski,  
Gilewski

Kratownice

Czym są kratownice

Opis matematyczny

Tensegrity

Niepewność

Parametry niepewne

W jakim celu?

Perspektywy

Niepewność wprowadzana jest do równań poprzez parametry przedziałowe

$$[p_i] = [mid(p_i) - rad(p_i), mid(p_i) + rad(p_i)]$$

# Parametry niepewne

Kratownice i tensegrity z niepewnymi parametrami.

Pelczynski,  
Gilewski

Kratownice

Czym są kratownice

Opis matematyczny

Tensegrity

Niepewność

Parametry niepewne

W jakim celu?

Perspektywy

- 1 Moduł Younga  $E_i$  – **D**
- 2 Przekroje prętów  $A_i$  – **D**
- 3 Obciążenia  $P_i$  – **P**
- 4 Długości prętów  $L_i$  – **D i B**
- 5 Współrzędne węzłów – **D i B**
- 6 Kierunki podparć – **B**

Układ równań rozwiązujących

$$\mathbf{K}_L \mathbf{q} = \mathbf{P}$$

$$\mathbf{K}_L = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}$$

# Niepewność $A_i$ oraz $E_i$

Kratownice i tensegrity z niepewnymi parametrami.

Pelczynski, Gilewski

Kratownice

Czym są kratownice

Opis matematyczny

Tensegrity

Niepewność

Parametry niepewne

W jakim celu?

Perspektywy

Definiujemy przedziały  $D_i \in [D_i]$ ,  $[\mathbf{D}]$  - macierz przedziałowa z elementami  $[D_i]$  na przekątnej.

$$\mathbf{K}_L \mathbf{q} = \mathbf{P} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{B}^{(i)}, \mathbf{q} \rangle [D_i] \mathbf{B}^{(i)} = \mathbf{P}$$

$\mathbf{B}^{(i)}$   $i$ -ta kolumna macierzy  $\mathbf{B}^T$

Rozwiązanie można przedstawić w formie

$$\Xi = \left\{ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \mid (\exists \mathbf{D} \in [\mathbf{D}]) (\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}) \mathbf{q} = \mathbf{P} \right\}$$

Wtedy układ równań można zapisać symbolicznie w formie

$$\mathbf{q} \in \Xi \Leftrightarrow \mathbf{P} \in \mathcal{V}(\mathbf{q}), \quad \mathcal{V}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{B}^{(i)}, \mathbf{q} \rangle \mathbf{B}^{(i)} * [D_i]$$

# Suma Minkowskiego

Kratownice i tensegrity z niepewnymi parametrami.

Pelczynski, Gilewski

Kratownice

Czym są kratownice

Opis matematyczny

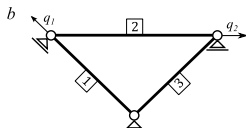
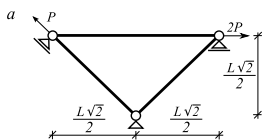
Tensegrity

Niepewność

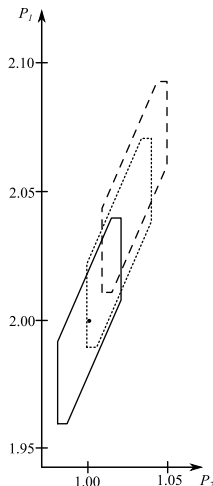
Parametry niepewne

W jakim celu?

Perspektywy



- 1 Trzy parametry niepewności –  $E_i A_i$  (tyle ile prętów).
- 2 Ustalony, dwuelementowy wektor przemieszczeń  $\mathbf{q}$ .
- 3 Ustalony wektor obciążeń  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} P$ .
- 4 Możliwe przedstawienie zbioru rozwiązań w przestrzeni  $P_1$ - $P_2$ .



# Punktu graniczne

Kratownice i tensegrity z niepewnymi parametrami.

Pelczynski, Gilewski

Kratownice

Czym są kratownice

Opis matematyczny

Tensegrity

Niepewność

Parametry niepewne

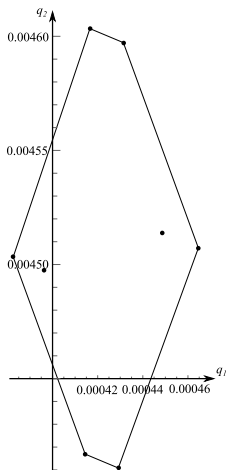
W jakim celu?

Perspektywy

## 1 Ośiem punktów granicznych:

- $D_1^-$ ,  $D_2^-$ ,  $D_3^-$
- $D_1^-$ ,  $D_2^-$ ,  $D_3^+$
- $D_1^-$ ,  $D_2^+$ ,  $D_3^-$
- itd.

## 2 Uwypuklenie: Neumaier, A., & Pownuk, A. (2007). Linear systems with large uncertainties, with applications to truss structures. *Reliable Computing*, 13(2), 149-172.



# Układ nierówności

Kratownice i tensegrity z niepewnymi parametrami.

Pelczynski, Gilewski

Kratownice

Czym są kratownice

Opis matematyczny

Tensegrity

Niepewność

Parametry niepewne

W jakim celu?

Perspektywy

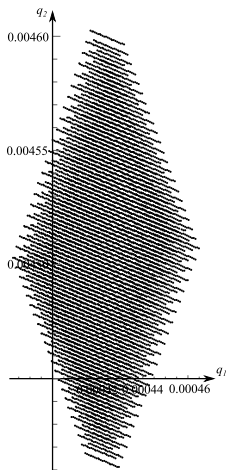
Zbiór rozwiązań w postaci układu nierówności

$$\mathbf{q} \in \Xi \Leftrightarrow 0 \leq h(\mathbf{u}, \mathcal{V}_q)$$

Funkcja podpierająca w kierunku  $\mathbf{u}$ :

$$h(\mathbf{u}, \mathcal{Z}) = \sup \{ \langle \mathbf{u}, \mathcal{Z} \rangle : z \in \mathcal{Z} \}.$$

Możliwe jest dokładne oszacowanie zbioru rozwiązań w przestrzeni  $\mathbf{q}_1$ - $\mathbf{q}_2$ , jeżeli wektory  $\mathbf{u}_i$  są prostopadłe do  $\mathbf{B}^{(i)}$ .



# W jakim celu niepewność?

Kratownice i tensegrity z niepewnymi parametrami.

Pelczynski, Gilewski

Kratownice

Czym są kratownice

Opis matematyczny

Tensegrity

Niepewność

Parametry niepewne

W jakim celu?

Perspektywy

## 1 Ograniczenia wartości

- przemieszczeń  $\mathbf{q} < \mathbf{q}_g$ ,
- sił wewnętrznych  $\mathbf{S} < \mathbf{S}_g$ .

## 2 Nie ma idealnych konstrukcji

- imperfekcje,
- niejednorodność materiału,
- dokładność wykonania elementów,
- obciążenia (wiatr, śnieg).

# Perspektywy

Kratownice i tensegrity z niepewnymi parametrami.

Pelczynski,  
Gilewski

Kratownice

Czym są kratownice  
Opis matematyczny

Tensegrity

Niepewność

Parametry niepewne  
W jakim celu?

Perspektywy

- 1 Rozwinięcie na inne typy konstrukcji wraz z zastosowaniem Metody Elementów Skończonych.
- 2 Rozszerzenie o kolejne typy parametrów niepewnych
  - współrzędne węzłów,
  - długości prętów,
  - kierunki podparć,