Reprezentacja równania Hamiltona-Jacobiego w teorii sterowania optymalnego

Arkadiusz Misztela

Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego

XLV Konferencja Zastosowań Matematyki
Zakopane-Kościelisko 2016

Plan wystąpienia

Problem optymalnego sterowania Bolzy

Dla $(t_0, x_0) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ rozważmy problem sterowania optymalnego

$$(\mathcal{P}_{t_0,x_0}) \qquad \begin{cases} \min \quad \Gamma((x,a)(\cdot)) := g(x(T)) + \displaystyle\int_{t_0}^{T} l(t,x(t),a(t))\,dt, \\ \text{po} \quad \dot{x}(t) = f(t,x(t),a(t)), \quad a(t) \in A \ \text{ a.e. } \ t \in [t_0,T], \\ \text{i} \quad x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Problem optymalnego sterowania Bolzy

Dla $(t_0, x_0) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ rozważmy problem sterowania optymalnego

$$(\mathcal{P}_{t_0,x_0}) \qquad \begin{cases} \text{min} \quad \Gamma((x,a)(\cdot)) := g(x(T)) + \displaystyle\int_{t_0}^{T} l(t,x(t),a(t))\,dt, \\ \text{po} \quad \dot{x}(t) = f(t,x(t),a(t)), \quad a(t) \in A \ \text{ a.e. } \ t \in [t_0,T], \\ \text{i} \quad x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Niech A będzie zbiorem domkniętym w $\mathbb{R}^m$, g dolnie półciągłą funkcją,

Problem optymalnego sterowania Bolzy

Dla $(t_0, x_0) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ rozważmy problem sterowania optymalnego

$$(\mathcal{P}_{t_0,x_0}) \qquad \begin{cases} \min \quad \Gamma((x,a)(\cdot)) := g(x(T)) + \int_{t_0}^{T} l(t,x(t),a(t))\,dt, \\ \text{po} \quad \dot{x}(t) = f(t,x(t),a(t)), \quad a(t) \in A \ \text{ a.e. } \ t \in [t_0,T], \\ \text{i} \quad x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Niech A będzie zbiorem domkniętym w $\mathbb{R}^m$, g dolnie półciągłą funkcją,

(A1) $f(\cdot,x,a)$ oraz $l(\cdot,x,a)$ mierzalne dla dowolnych $x \in \mathbb{R}^n$, $a \in A$,
$f(t,\cdot,\cdot)$ oraz $l(t,\cdot,\cdot)$ ciągłe dla każdego $t \in [0,T]$,
$l(t,x,\cdot)$ ograniczona z dołu dla dowolnych $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$;

Problem optymalnego sterowania Bolzy

Dla $(t_0, x_0) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ rozważmy problem sterowania optymalnego

$$(\mathcal{P}_{t_0,x_0}) \qquad \begin{cases} \min & \Gamma((x,a)(\cdot)) := g(x(T)) + \displaystyle\int_{t_0}^{T} l(t,x(t),a(t))\,dt, \\ \text{po} & \dot{x}(t) = f(t,x(t),a(t)), \quad a(t) \in A \ \text{ a.e. } \ t \in [t_0,T], \\ \text{i} & x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Niech A będzie zbiorem domkniętym w $\mathbb{R}^m$, g dolnie półciągłą funkcją,

(A1) $f(\cdot,x,a)$ oraz $l(\cdot,x,a)$ mierzalne dla dowolnych $x \in \mathbb{R}^n$, $a \in A$,
$f(t,\cdot,\cdot)$ oraz $l(t,\cdot,\cdot)$ ciągłe dla każdego $t \in [0,T]$,
$l(t,x,\cdot)$ ograniczona z dołu dla dowolnych $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$;

(A2) Dla każdego $R > 0$ istnieje mierzalna funkcja $k_R : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ taka, że
$|f(t,x,a) - f(t,y,a)| \leqslant k_R(t)|x-y|$ oraz $|l(t,x,a) - l(t,y,a)| \leqslant k_R(t)|x-y|$
dla prawie wszystkich $t \in [0,T]$ oraz dowolnych $x, y \in \mathbb{B}_R$, $a \in A$;

Problem optymalnego sterowania Bolzy

Dla $(t_0, x_0) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ rozważmy problem sterowania optymalnego

$$(\mathcal{P}_{t_0,x_0}) \qquad \begin{cases} \min \quad \Gamma((x,a)(\cdot)) := g(x(T)) + \displaystyle\int_{t_0}^{T} l(t,x(t),a(t))\,dt, \\ \text{po} \quad \dot{x}(t) = f(t,x(t),a(t)), \quad a(t) \in A \ \text{ a.e. } \ t \in [t_0,T], \\ \text{i} \quad x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Niech A będzie zbiorem domkniętym w $\mathbb{R}^m$, g dolnie półciągłą funkcją,

(A1) $f(\cdot,x,a)$ oraz $l(\cdot,x,a)$ mierzalne dla dowolnych $x \in \mathbb{R}^n$, $a \in A$, $f(t,\cdot,\cdot)$ oraz $l(t,\cdot,\cdot)$ ciągłe dla każdego $t \in [0,T]$, $l(t,x,\cdot)$ ograniczona z dołu dla dowolnych $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$;

(A2) Dla każdego $R > 0$ istnieje mierzalna funkcja $k_R : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ taka, że $|f(t,x,a) - f(t,y,a)| \leqslant k_R(t)|x-y|$ oraz $|l(t,x,a) - l(t,y,a)| \leqslant k_R(t)|x-y|$ dla prawie wszystkich $t \in [0,T]$ oraz dowolnych $x, y \in \mathbb{B}_R$, $a \in A$;

(A3) Istnieje mierzalna funkcja $c : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ taka, że dla dowolnych $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $a \in A$ zachodzi nierówność $|f(t,x,a)| \leqslant c(t)(1+|x|)$.

Równanie Hamiltona-Jacobiego-Bellmana

Wiadomo, że można powiązać rodzinę problemów sterowania optymalnego $\{\mathcal{P}_{t_0,x_0} \mid (t_0,x_0) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n\}$ z równaniem Hamiltona-Jacobiego-Bellmana

(HJB) $$\begin{cases} -V_t + H(t,x,-V_x) = 0 & \text{in} \quad (0,T) \times \mathbb{R}^n, \\ V(T,x) = g(x) & \text{in} \quad \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

gdzie

$$H(t,x,p) := \sup_{a \in A} \{ \langle p, f(t,x,a) \rangle - l(t,x,a) \}.$$

Równanie Hamiltona-Jacobiego-Bellmana

Wiadomo, że można powiązać rodzinę problemów sterowania optymalnego $\{\mathcal{P}_{t_0,x_0} \mid (t_0,x_0) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n\}$ z równaniem Hamiltona-Jacobiego-Bellmana

$$\text{(HJB)} \qquad \begin{cases} -V_t + H(t,x,-V_x) = 0 & \text{in} \quad (0,T) \times \mathbb{R}^n, \\ V(T,x) = g(x) & \text{in} \quad \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

gdzie

$$H(t,x,p) := \sup_{a \in A} \{ \langle p, f(t,x,a) \rangle - l(t,x,a) \}.$$

Związek między problemem Bolzy $\mathcal{P}_{t_0,x_0}$ a równaniem HJB polega na tym, że jeżeli $V(t_0,x_0)$ jest funkcją wartości $\mathcal{P}_{t_0,x_0}$, innymi słowy,

$$V(t_0,x_0) := \inf_{a(\cdot)} g(x_a(T)) + \int_{t_0}^{T} l(t, x_a(t), a(t))\, dt,$$

to V jest jednoznacznym lepkościowym rozwiązaniem równania HJB.

Standardowe Warunki

Warunki na $H : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

(H1) $H(\cdot, x, p)$ jest mierzalne dla dowolnych $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$;

(H2) $H(t, \cdot, \cdot)$ jest ciągłe dla każdego $t \in [0,T]$;

(H3) $H(t, x, \cdot)$ jest wypukłe dla dowolnych $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$;

(H4) $|H(t,x,p) - H(t,x,q)| \leqslant c(t)(1+|x|)|p-q|$ dla dowolnych $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $p, q \in \mathbb{R}^n$ oraz mierzalnej funkcji $c : [0,T] \to \mathbb{R}_+$.

Warunek typu Lipschitza:

(HLC) Dla każdego $R > 0$ istnieje mierzalna funkcja $k_R : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ i zbiór miary zero $\mathcal{N}_R$ takie, że $|H(t,x,p) - H(t,y,p)| \leqslant k_R(t) \cdot (1+|p|)|x-y|$ dla wszystkich $t \in [0,T] \setminus \mathcal{N}_R$, $x, y \in \mathbb{B}_R$, $p \in \mathbb{R}^n$.

Reprezentacja równania HJB

Problem

Niech dane będzie równanie HJB z hamiltonianem H spełniającym tylko (H1)-(H4) oraz (HLC). Wtedy można zastanowić się, czy równanie HJB jest reprezentowane przez pewną rodzinę problemów sterowania optymalnego $\{\mathcal{P}_{t_0,x_0} \mid (t_0,x_0) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n\}$. Innymi słowy, pytamy czy istnieje trójka (A,f,l), która spełnia (A1)-(A3) oraz następującą równość

$$H(t,x,p) = \sup_{a\in A}\{\langle p\,, f(t,x,a)\rangle - l(t,x,a)\}. \tag{1}$$

Taką trójkę będziemy nazywać *wiarygodną reprezentacją* hamiltonianu H w teorii sterowania optymalnego.

Reprezentacja równania HJB

Problem

Niech dane będzie równanie HJB z hamiltonianem H spełniającym tylko (H1)-(H4) oraz (HLC). Wtedy można zastanowić się, czy równanie HJB jest reprezentowane przez pewną rodzinę problemów sterowania optymalnego $\{\mathcal{P}_{t_0,x_0} \mid (t_0,x_0) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n\}$. Innymi słowy, pytamy czy istnieje trójka (A,f,l), która spełnia (A1)-(A3) oraz następującą równość

$$H(t,x,p) = \sup_{a\in A}\{\langle p, f(t,x,a)\rangle - l(t,x,a)\}. \tag{1}$$

Taką trójkę będziemy nazywać *wiarygodną reprezentacją* hamiltonianu H w teorii sterowania optymalnego.

Uwaga. Jeżeli istnieje trójka (A,f,l) spełniająca równość (1), to istnieje nieskończenie wiele takich trójek. W dodatku do tego f oraz l mogą być całkowicie nieregularne. Trójkę (A,f,l) niekoniecznie regularną, która spełnia równość (1) nazywa się *reprezentacją* hamiltonianu H.

Wiarygodne reprezentacje w literaturze

1. Wiarygodne reprezentacje hamiltonianów w teorii sterowania optymalnego pierwszy badał Rampazzo w następującej pracy

   F. Rampazzo, *Faithful representations for convex Hamilton-Jacobi equations*, SIAM J. Control Optim., 44(3) (2005), 867-884.

   Rampazzo w powyższej pracy koncentrował się na badaniu ciągłych wiarygodnych reprezentacji.

Wiarygodne reprezentacje w literaturze

1. Wiarygodne reprezentacje hamiltonianów w teorii sterowania optymalnego pierwszy badał Rampazzo w następującej pracy

   F. Rampazzo, *Faithful representations for convex Hamilton-Jacobi equations*, SIAM J. Control Optim., 44(3) (2005), 867-884.

   Rampazzo w powyższej pracy koncentrował się na badaniu ciągłych wiarygodnych reprezentacji.

2. Następnie, Frankowska-Sedrakyan badali wiarygodne reprezentacje mierzalne ze względu na t oraz ich stabilność w następującej pracy

   H. Frankowska, H. Sedrakyan, *Stable representation of convex Hamiltonians*, Nonlinear Anal., 100 (2014), 30-42.

Wiarygodne reprezentacje w literaturze

1. Wiarygodne reprezentacje hamiltonianów w teorii sterowania optymalnego pierwszy badał Rampazzo w następującej pracy

   F. Rampazzo, *Faithful representations for convex Hamilton-Jacobi equations*, SIAM J. Control Optim., 44(3) (2005), 867-884.

   Rampazzo w powyższej pracy koncentrował się na badaniu ciągłych wiarygodnych reprezentacji.

2. Następnie, Frankowska-Sedrakyan badali wiarygodne reprezentacje mierzalne ze względu na t oraz ich stabilność w następującej pracy

   H. Frankowska, H. Sedrakyan, *Stable representation of convex Hamiltonians*, Nonlinear Anal., 100 (2014), 30-42.

Uwaga. Generalnie wiarygodne reprezentacje wykorzystuje się do badania regularności rozwiązań równań HJB. Dlatego należy konstruować funkcje f, l tak regularne jak jest to możliwe.

Konstrukcja reprezentacji RFS

Rozważmy transformatę Legendre'a-Fenchela hamiltonianu H ze względu na ostatnią zmienną, transformatę H nazywamy lagrangianem,

$$L(t,x,v) := H^*(t,x,v) := \sup_{p \in \mathbb{R}^n} \{\langle v,p\rangle - H(t,x,p)\}.$$

L przyjmuje wartości w zbiorze $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Zbiór $\operatorname{dom}\varphi := \{x \mid \varphi(x) \neq \pm\infty\}$ nazywamy *dziedziną efektywną* φ. Zdefiniujmy multifunkcję jak następuje

$$F_L(t,x) := \operatorname{dom} L(t,x,\cdot).$$

Konstrukcja reprezentacji RFS

Rozważmy transformatę Legendre'a-Fenchela hamiltonianu H ze względu na ostatnią zmienną, transformatę H nazywamy lagrangianem,

$$L(t,x,v) := H^*(t,x,v) := \sup_{p\in\mathbb{R}^n}\{\langle v,p\rangle - H(t,x,p)\}.$$

L przyjmuje wartości w zbiorze $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Zbiór $\operatorname{dom}\varphi := \{x \mid \varphi(x) \neq \pm\infty\}$ nazywamy *dziedziną efektywną* φ. Zdefiniujmy multifunkcję jak następuje

$$F_L(t,x) := \operatorname{dom} L(t,x,\cdot).$$

Niech H spełnia (H1)-(H4) oraz (HLC). Ponadto załóżmy, że L spełnia techniczny warunek (TC), gdzie $L := H^*$. Wówczas

- $F_L(t,x)$ jest niepusty, zwarty i wypukły dla każdych $t\in[0,T]$, $x\in\mathbb{R}^n$;
- $F_L(\cdot,x)$ jest multifunkcją mierzalną dla każdego $x\in\mathbb{R}^n$;
- $F_L(t,\cdot)$ jest multifunkcją $\mathscr{H}$-ciągłą dla każdego $t\in[0,T]$;
- $\|F_L(t,x)\| \leqslant c(t)(1+|x|)$ dla dowolnych $t\in[0,T]$, $x\in\mathbb{R}^n$;
- $\mathscr{H}(F_L(t,x),F_L(t,y)) \leqslant k_R(t)|x-y|$ dla każdych $t\in[0,T]\setminus\mathcal{N}_R$, $x,y\in\mathbb{B}_R$.

Konstrukcja reprezentacji RFS

- Jeżeli multifunkcja F_L spełnia powyższe warunki, to z twierdzenia o parametryzacji multifunkcji istnieje funkcja $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{B}_1 \to \mathbb{R}^n$ mierzalna ze względu na t i taka, że
  - $f(t,x,\mathbb{B}_1) = F_L(t,x)$ dla dowolnych $t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^n$;
  - $f(t,\cdot,\cdot)$ jest $k_R(t)$-lipschitzka na zbiorze $\mathbb{B}_R \times \mathbb{B}_1$.

Konstrukcja reprezentacji RFS

- Jeżeli multifunkcja F_L spełnia powyższe warunki, to z twierdzenia o parametryzacji multifunkcji istnieje funkcja $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{B}_1 \to \mathbb{R}^n$ mierzalna ze względu na t i taka, że
  - $f(t,x,\mathbb{B}_1) = F_L(t,x)$ dla dowolnych $t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^n$;
  - $f(t,\cdot,\cdot)$ jest $k_R(t)$-lipschitzka na zbiorze $\mathbb{B}_R \times \mathbb{B}_1$.
- Zdefiniujmy $l(t,x,a) := L(t,x,f(t,x,a))$. Generalnie funkcja l nie jest wystarczająco regularna, chyba że L spełnia techniczny warunek (TC).

Konstrukcja reprezentacji RFS

- Jeżeli multifunkcja F_L spełnia powyższe warunki, to z twierdzenia o parametryzacji multifunkcji istnieje funkcja $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{B}_1 \to \mathbb{R}^n$ mierzalna ze względu na t i taka, że
  - $f(t,x,\mathbb{B}_1) = F_L(t,x)$ dla dowolnych $t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^n$;
  - $f(t,\cdot,\cdot)$ jest $k_R(t)$-lipschitzka na zbiorze $\mathbb{B}_R \times \mathbb{B}_1$.
- Zdefiniujmy $l(t,x,a) := L(t,x,f(t,x,a))$. Generalnie funkcja l nie jest wystarczająco regularna, chyba że L spełnia techniczny warunek (TC).
- Zatem trójka $(\mathbb{B}_1, f, l)$ jest wiarygodną reprezentacją H, jeżeli H spełnia (H1)-(H4) i (HLC) oraz $L := H^*$ spełnia techniczny warunek (TC).

Główny rezultat Rampazzo-Frankowskiej-Sedrakyana

Twierdzenie (Rampazzo-Frankowskiej-Sedrakyana)

Załóżmy, że (H1)-(H4), (HLC) *oraz* (TC) *zachodzą. Wówczas istnieją funkcje* $f:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times A\to\mathbb{R}^n$ *oraz* $l:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times A\to\mathbb{R}$, *t-mierzalne, ze zbiorem sterującym* $A:=\mathbb{B}_1\subset\mathbb{R}^n$, *takie, że dla dowolnych* $t\in[0,T]$, $x,p\in\mathbb{R}^n$

$$H(t,x,p)=\sup_{a\in A}\{\langle p,f(t,x,a)\rangle-l(t,x,a)\}$$

oraz $f(t,x,A)=\operatorname{dom}H^*(t,x,\cdot)$. *Ponadto zachodzą warunki:*

1. *Dla każdego* $R>0$ *oraz dowolnych* $t\in[0,T]\setminus\mathcal{N}_R$, $x,y\in\mathbb{B}_R$, $a,b\in A$

$$\begin{cases}|f(t,x,a)-f(t,y,b)|\leqslant 10nk_R(t)|x-y|+5n(1+R)c(t)|a-b|\\ |l(t,x,a)-l(t,y,a)|\leqslant(1+11nK_R)k_R(t)|x-y|\\ |l(t,x,a)-l(t,x,b)|\leqslant 5nK_R(1+R)c(t)|a-b|.\end{cases}$$

2. $|f(t,x,a)|\leqslant c(t)(1+|x|)$ *dla dowolnych* $t\in[0,T]$, $x\in\mathbb{R}^n$, $a\in A$.
3. *Jeżeli* H *oraz* $c(\cdot)$ *są ciągłe, to również* f,l *takie są.*

W szczególności trójka (A,f,l) *jest wiarygodną reprezentacją* H.

Problem związany z konstrukcją RFS

Techniczny warunek:

Dla każdego $R > 0$ istnieje $K_R > 0$ takie, że

(TC) $L(t,x,v) = \max\{\langle v,p\rangle - H(t,x,p) \mid p \in \mathbb{B}(0,K_R)\}$

dla każdych $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{B}_R$, $v \in \operatorname{dom} L(t,x,\cdot)$, gdzie $L = H^*$.

Problem związany z konstrukcją RFS

Techniczny warunek:

Dla każdego $R > 0$ istnieje $K_R > 0$ takie, że

(TC) $L(t,x,v) = \max\{\langle v,p\rangle - H(t,x,p) \mid p \in \mathbb{B}(0,K_R)\}$

dla każdych $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{B}_R$, $v \in \operatorname{dom} L(t,x,\cdot)$, gdzie $L = H^*$.

Jeżeli (H1)-(H4) oraz (HLC) zachodzą, to (TC) implikuje, że:

- $L(t,\cdot,\cdot)$ jest funkcją lipschitzowską na zbiorze $(\mathbb{B}_R \times \mathbb{R}^n) \cap \operatorname{dom} L(t,\cdot,\cdot)$. Rampazzo postawił problem, jak osłabić warunek (TC).
- $L(t,\cdot,\cdot)$ jest funkcją ograniczoną na zbiorze $(\mathbb{B}_R \times \mathbb{R}^n) \cap \operatorname{dom} L(t,\cdot,\cdot)$. Frankowska-Sedrakyan pytają, co można powiedzieć o istnieniu wiarygodnej reprezentacji w przypadku nieograniczonego Lagrangianu na dziedzinie efektywnej.

Problem związany z konstrukcją RFS

Regularny hamiltonian z nieciągłym lagrangianem

Przykład. Zdefiniujmy hamiltonian $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$H(x,p) := \max\{|p||x| - 1, 0\}.$$

Hamiltonian ten spełnia (H1)-(H4) oraz (HLC). Lagrangian $L := H^*$ jest dany wzorem

$$L(x,v) = \begin{cases} +\infty & \text{if} \quad |v| > |x|,\ x \neq 0, \\ \left|\frac{v}{x}\right| & \text{if} \quad |v| \leqslant |x|,\ x \neq 0, \\ 0 & \text{if} \quad v = 0,\ x = 0, \\ +\infty & \text{if} \quad v \neq 0,\ x = 0. \end{cases}$$

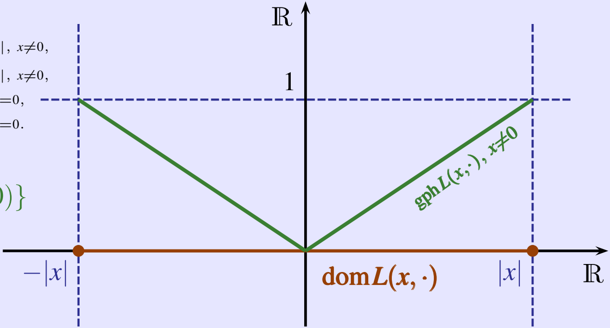
Oczywiście $\operatorname{dom} L(x,\cdot) = [-|x|, |x|\,]$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ oraz $|L(x,v)| \leqslant 1$ dla każdego $(x,v) \in \operatorname{dom} L(\cdot,\cdot)$. Ponadto $L(\cdot,\cdot)$ nie spełnia (TC), gdyż nie jest ciągłe na zbiorze $\operatorname{dom} L$. Istotnie,

$$\lim_{i\to\infty} L\left(1/i, 1/i\right) = 1 \neq 0 = L(0,0).$$

Problem związany z konstrukcją RFS

$$L(x,v)=\begin{cases} +\infty & \text{if} \quad |v|>|x|,\ x\neq 0, \\ \left|\frac{v}{x}\right| & \text{if} \quad |v|\leqslant |x|,\ x\neq 0, \\ 0 & \text{if} \quad v=0,\ x=0, \\ +\infty & \text{if} \quad v\neq 0,\ x=0. \end{cases}$$

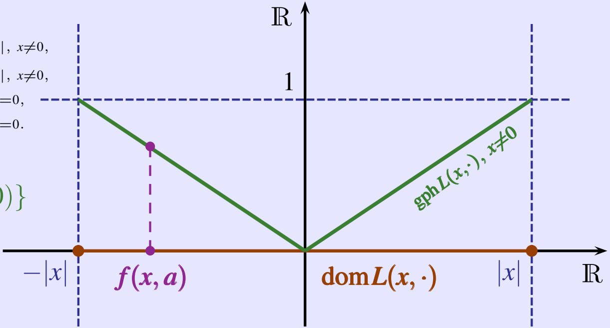
$$\operatorname{gph} L(0,\cdot) = \{(0,0)\}$$



Problem związany z konstrukcją RFS

$$L(x,v)=\begin{cases} +\infty & \text{if} \quad |v|>|x|,\ x\neq 0, \\ \left|\frac{v}{x}\right| & \text{if} \quad |v|\leqslant|x|,\ x\neq 0, \\ 0 & \text{if} \quad v=0,\ x=0, \\ +\infty & \text{if} \quad v\neq 0,\ x=0. \end{cases}$$

$$\mathrm{gph}\, L(0,\cdot) = \{(0,0)\}$$

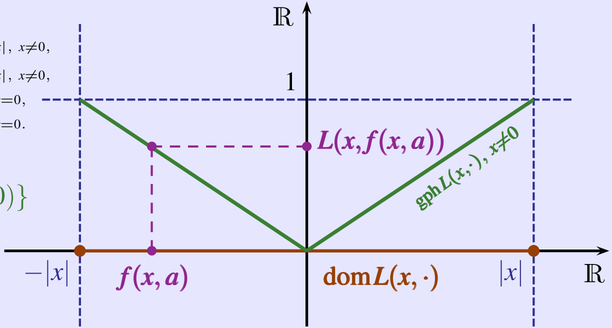


$$f(x,a) = a|x| \ \text{ oraz } \ A = [-1,1],$$

Problem związany z konstrukcją RFS

$$L(x,v)=\begin{cases} +\infty & \text{if} \quad |v|>|x|,\ x\neq 0,\\ \left|\frac{v}{x}\right| & \text{if} \quad |v|\leqslant |x|,\ x\neq 0,\\ 0 & \text{if} \quad v=0,\ x=0,\\ +\infty & \text{if} \quad v\neq 0,\ x=0.\end{cases}$$

$$\operatorname{gph} L(0,\cdot) = \{(0,0)\}$$



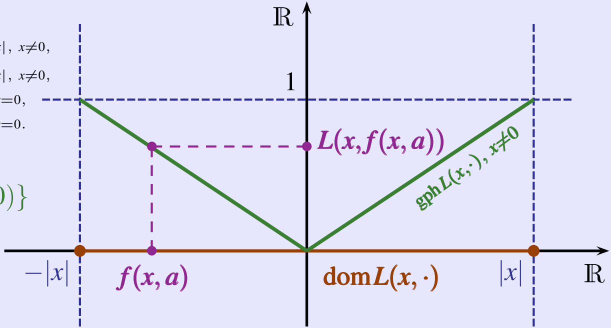
$$f(x,a) = a|x| \quad \text{oraz} \quad A = [-1,1],$$

$$l(x,a) = L(x,f(x,a)) = \begin{cases} |a| & \text{if} \quad x\neq 0\\ 0 & \text{if} \quad x=0.\end{cases}$$

Problem związany z konstrukcją RFS

$$L(x,v)=\begin{cases} +\infty & \text{if} \quad |v|>|x|,\ x\neq 0, \\ \left|\frac{v}{x}\right| & \text{if} \quad |v|\leqslant|x|,\ x\neq 0, \\ 0 & \text{if} \quad v=0,\ x=0, \\ +\infty & \text{if} \quad v\neq 0,\ x=0. \end{cases}$$

$$\operatorname{gph} L(0,\cdot) = \{(0,0)\}$$



$$f(x,a) = a|x| \quad \text{oraz} \quad A = [-1,1],$$

$$l(x,a) = L(x,f(x,a)) = \begin{cases} |a| & \text{if} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{if} \quad x=0, \end{cases}$$

$l(\cdot,\cdot)$ **nie jest funkcją ciągłą.**

Problem związany z konstrukcją RFS

Regularny hamiltonian z nieograniczonym lagrangianem

Przykład. Zdefiniujmy hamiltonian $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$H(x,p) := \begin{cases} (\sqrt{|xp|} - 1)^2 & \text{if} \quad |xp| > 1, \\ 0 & \text{if} \quad |xp| \leqslant 1. \end{cases}$$

Hamiltonian ten spełnia (H1)-(H4) oraz (HLC). Lagrangian $L := H^*$ jest dany wzorem

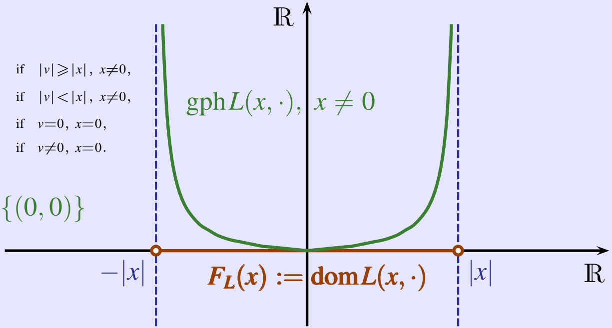
$$L(x,v) = \begin{cases} +\infty & \text{if} \quad |v| \geqslant |x|,\ x \neq 0, \\ \dfrac{|v|}{|x| - |v|} & \text{if} \quad |v| < |x|,\ x \neq 0, \\ 0 & \text{if} \quad v = 0,\ x = 0, \\ +\infty & \text{if} \quad v \neq 0,\ x = 0. \end{cases}$$

Funkcja $L(x,\cdot)$ nie jest ograniczona na zbiorze $\operatorname{dom} L(x,\cdot) = (-|x|, |x|)$ dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zatem $L(\cdot,\cdot)$ nie spełnia (TC).

Problem związany z konstrukcją RFS

$$L(x,v)=\begin{cases} +\infty & \text{if } \ |v|\geqslant|x|,\ x\neq 0, \\ \dfrac{|v|}{|x|-|v|} & \text{if } \ |v|<|x|,\ x\neq 0, \\ 0 & \text{if } \ v=0,\ x=0, \\ +\infty & \text{if } \ v\neq 0,\ x=0. \end{cases}$$

$\operatorname{gph} L(0,\cdot)=\{(0,0)\}$



Czy w tym przypadku istnieje wiarygodna reprezentacja?

Warunek Konieczny

Ograniczoność lagrangianu na dziedzinie efektywnej :

(NC) Istnieje $\lambda : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t-mierzalne dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ oraz x-ciągłe dla każdego $t \in [0,T]$ take, że $L(t,x,v) \leqslant \lambda(t,x)$ dla każdych $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in \operatorname{dom} L(t,x,\cdot)$, ponadto dla każdego $R > 0$ istnieją funkcja k_R i zbiór miary zero $\mathcal{N}_R$ takie, że $|\lambda(t,x) - \lambda(t,y)| \leqslant k_R(t)|x-y|$ dla każdych $t \in [0,T] \setminus \mathcal{N}_R$, $x,y \in \mathbb{B}_R$.

Warunek Konieczny

Ograniczoność lagrangianu na dziedzinie efektywnej :

(NC) Istnieje $\lambda : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t-mierzalne dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ oraz x-ciągłe dla każdego $t \in [0,T]$ take, że $L(t,x,v) \leqslant \lambda(t,x)$ dla każdych $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in \operatorname{dom} L(t,x,\cdot)$, ponadto dla każdego $R>0$ istnieją funkcja k_R i zbiór miary zero $\mathcal{N}_R$ takie, że $|\lambda(t,x)-\lambda(t,y)| \leqslant k_R(t)|x-y|$ dla każdych $t \in [0,T] \setminus \mathcal{N}_R$, $x,y \in \mathbb{B}_R$.

Twierdzenie (Misztela)

Niech A będzie niepusty i zwarty. Załóżmy, że $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}^n$ i $l : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}$ spełniają (A1)-(A3). *Jeżeli H jest dane wzorem*

$$H(t,x,p) := \sup_{a \in A} \{\langle p\,, f(t,x,a)\,\rangle - l(t,x,a)\},$$

to $L := H^*$ spełnia (NC) *z tą samą funkcją k_R oraz zbiorem $\mathcal{N}_R$ występującymi w założeniach* (A1)-(A3). *Ponadto λ jest ciągłe, jeżeli f i l są ciągłe.*

Nowa konstrukcja reprezentacji

Niech multifunkcja $E_L : [0,T] \times \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$E_L(t,x) := \{\, (v,\eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid L(t,x,v) \leqslant \eta \,\}.$$

Zauważmy, że $E_L(t,x) = \operatorname{epi} L(t,x,\cdot)$. Wcześniej RFS rozważali multifunkcję daną wzorem $F_L(t,x) := \operatorname{dom} L(t,x,\cdot)$.

Nowa konstrukcja reprezentacji

Niech multifunkcja $E_L : [0,T] \times \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$E_L(t,x) := \{ (v,\eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid L(t,x,v) \leqslant \eta \}.$$

Zauważmy, że $E_L(t,x) = \operatorname{epi} L(t,x,\cdot)$. Wcześniej RFS rozważali multifunkcję daną wzorem $F_L(t,x) := \operatorname{dom} L(t,x,\cdot)$.

Załóżmy, że H spełnia (H1)-(H4) oraz (HLC). Jeżeli $L := H^*$, to

- $E_L(t,x)$ jest niepusty, domknięty i wypukły dla każdych $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$;
- $E_L(t,\cdot)$ jest multifunkcją dolnie półciągłą dla każdego $t \in [0,T]$;
- $E_L(t,\cdot)$ jest multifunkcją o domkniętym wykresie dla każdego $t \in [0,T]$;
- $E_L(\cdot,x)$ jest multifunkcją mierzalną dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$;
- $\mathscr{H}(E_L(t,x), E_L(t,y)) \leqslant 2k_R(t)|x-y|$ dla każdych $t \in [0,T] \setminus \mathcal{N}_R$, $x,y \in \mathbb{B}_R$;
- $\|\operatorname{dom} L(t,x,\cdot)\| \leqslant c(t)(1+|x|)$ dla dowolnych $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Nowa konstrukcja reprezentacji

Twierdzenie (Misztela)

Załóżmy, że E_L spełnia powyższe warunki. Niech $M(t,x)$ będzie t-mierzalna dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ oraz x-ciągła dla każdego $t \in [0,T]$. Wówczas istnieje funkcja $\mathrm{e}\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, *t-mierzalna, taka, że*

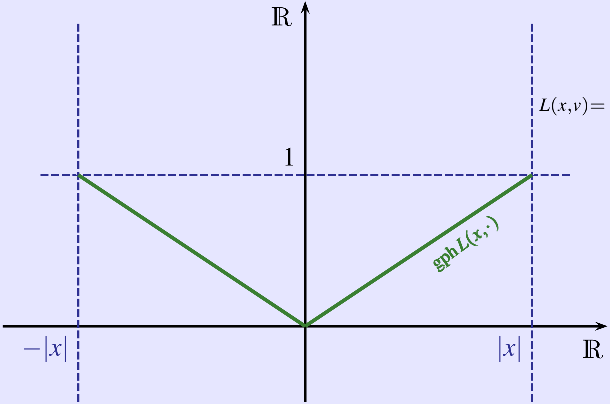
$$\left[E_L(t,x) \cap \mathbb{B}_{M(t,x)}\right] \subset \mathrm{e}(t,x,\mathbb{B}_1) \subset \mathrm{e}\left(t,x,\mathbb{R}^{n+1}\right) = E_L(t,x),$$

dla każdych $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$. Ponadto e *spełnia następującą nierówność*

$$|\mathrm{e}(t,x,a)-\mathrm{e}(t,y,b)| \leqslant 5(n+1)\left[\mathscr{H}(E_L(t,x),E_L(t,y))+|M(t,x)a-M(t,y)b|\right],$$

dla każdych $t \in [0,T]$, $a,b \in \mathbb{B}_1$, $x,y \in \mathbb{B}_R$, $R>0$. Dodatkowo e *jest ciągła, jeżeli M jest ciągła oraz E_L ma domknięty wykres i jest dolnie półciągła.*

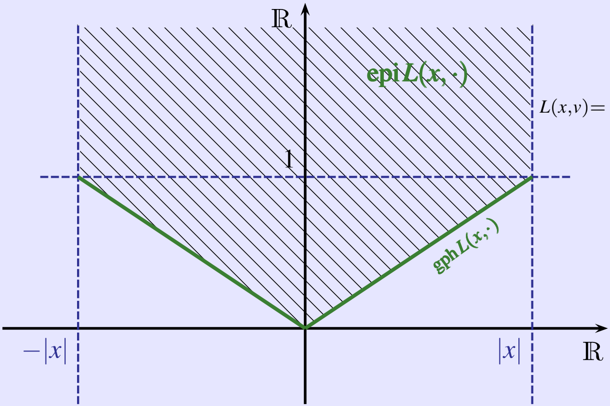
Nowa reprezentacja ze zwartym zbiorem sterującym



$$L(x,v) = \begin{cases} +\infty & \text{if } |v| > |x|,\ x \neq 0, \\ \left|\frac{v}{x}\right| & \text{if } |v| \leqslant |x|,\ x \neq 0, \\ 0 & \text{if } v = 0,\ x = 0, \\ +\infty & \text{if } v \neq 0,\ x = 0. \end{cases}$$

$L(\cdot,\cdot)$ **spełnia (NC) z** $\lambda(\cdot) \equiv 1$.

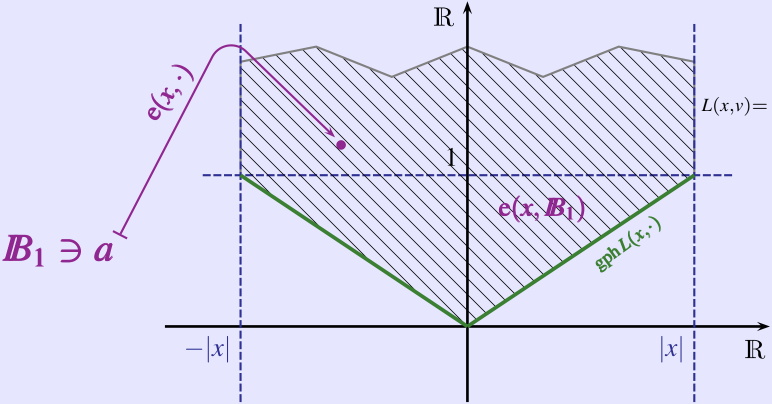
Nowa reprezentacja ze zwartym zbiorem sterującym



$$L(x,v)=\begin{cases}+\infty & \text{if } |v|>|x|,\ x\neq 0,\\ \left|\frac{v}{x}\right| & \text{if } |v|\leqslant|x|,\ x\neq 0,\\ 0 & \text{if } v=0,\ x=0,\\ +\infty & \text{if } v\neq 0,\ x=0.\end{cases}$$

$$\operatorname{gph} L(x,\cdot)\subset \operatorname{epi} L(x,\cdot)=E_L(x)$$

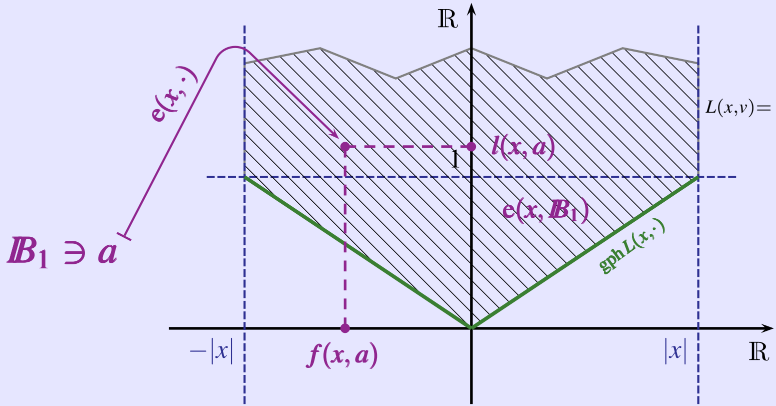
Nowa reprezentacja ze zwartym zbiorem sterującym



$$L(x,v)=\begin{cases} +\infty & \text{if } |v|>|x|,\ x\neq 0,\\ \left|\frac{v}{x}\right| & \text{if } |v|\leqslant|x|,\ x\neq 0,\\ 0 & \text{if } v=0,\ x=0,\\ +\infty & \text{if } v\neq 0,\ x=0.\end{cases}$$

$$\left[E_L(x)\cap \mathbb{B}_{M(x)}\right] \subset e(x,\mathbb{B}_1) \subset E_L(x)$$

Nowa reprezentacja ze zwartym zbiorem sterującym

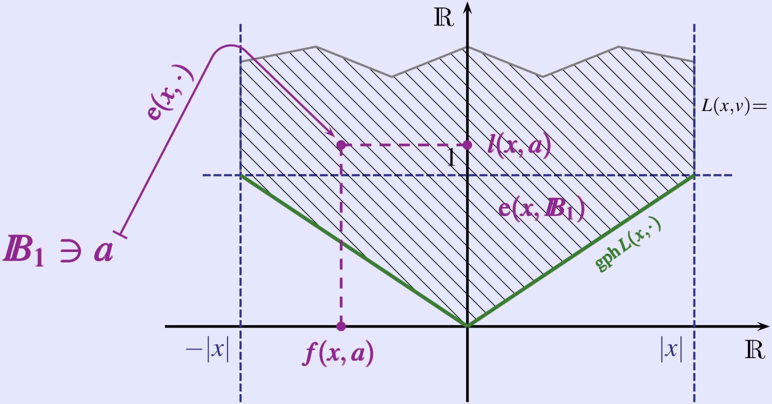


$$L(x,v)=\begin{cases} +\infty & \text{if } |v|>|x|,\ x\neq 0,\\ \left|\frac{v}{x}\right| & \text{if } |v|\leqslant|x|,\ x\neq 0,\\ 0 & \text{if } v=0,\ x=0,\\ +\infty & \text{if } v\neq 0,\ x=0.\end{cases}$$

$$e(x,a) = (f(x,a), l(x,a))$$

$$[E_L(x) \cap \mathbb{B}_{M(x)}] \subset e(x,\mathbb{B}_1) \subset E_L(x)$$

Nowa reprezentacja ze zwartym zbiorem sterującym



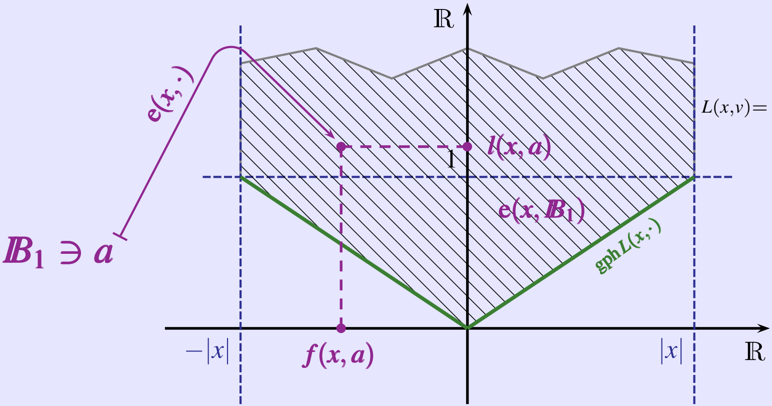
$$L(x,v)=\begin{cases} +\infty & \text{if } |v|>|x|,\ x\neq 0,\\ \left|\frac{v}{x}\right| & \text{if } |v|\leqslant|x|,\ x\neq 0,\\ 0 & \text{if } v=0,\ x=0,\\ +\infty & \text{if } v\neq 0,\ x=0. \end{cases}$$

$$e(x,a)=(f(x,a),l(x,a))$$

$$[E_L(x)\cap \mathbb{B}_{M(x)}]\subset e(x,\mathbb{B}_1)\subset E_L(x)$$

Czy tak skonstruowana trójka $(\mathbb{B}_1, f, l)$ jest reprezentacją H?

Nowa reprezentacja ze zwartym zbiorem sterującym



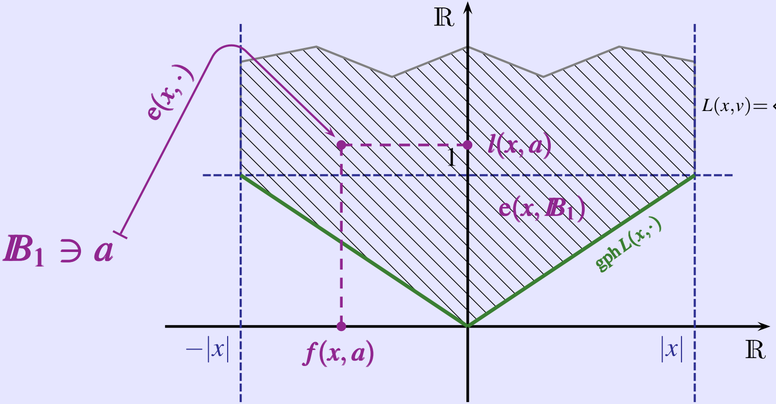
$$L(x,v)=\begin{cases} +\infty & \text{if } |v|>|x|,\ x\neq 0,\\ \left|\frac{v}{x}\right| & \text{if } |v|\leqslant|x|,\ x\neq 0,\\ 0 & \text{if } v=0,\ x=0,\\ +\infty & \text{if } v\neq 0,\ x=0. \end{cases}$$

$$\mathrm{e}(x,a)=(f(x,a),l(x,a))$$

$$\left[E_L(x)\cap\mathbb{B}_{M(x)}\right]\subset\mathrm{e}(x,\mathbb{B}_1)\subset E_L(x)$$

$$(\mathrm{NC})\ \Rightarrow\ \operatorname{gph} L(x,\cdot)\subset\left[E_L(x)\cap\mathbb{B}_{M(x)}\right]$$

Nowa reprezentacja ze zwartym zbiorem sterującym

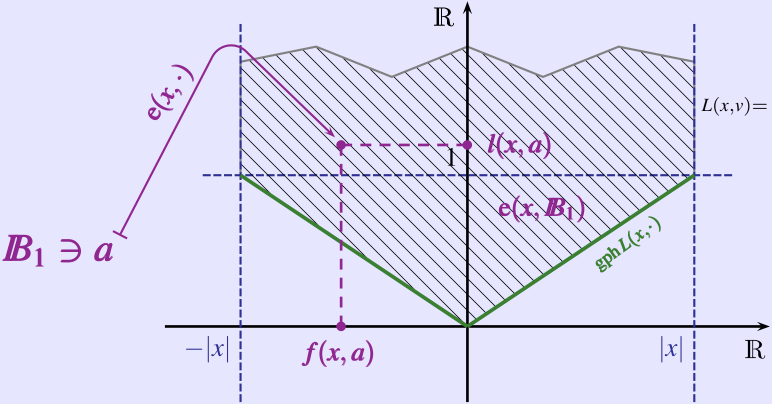


$$L(x,v)=\begin{cases} +\infty & \text{if } |v|>|x|,\ x\neq 0,\\ \left|\frac{v}{x}\right| & \text{if } |v|\leqslant |x|,\ x\neq 0,\\ 0 & \text{if } v=0,\ x=0,\\ +\infty & \text{if } v\neq 0,\ x=0. \end{cases}$$

$$\mathrm{e}(x,a)=(f(x,a),l(x,a))$$

$$\mathrm{gph}\,L(x,\cdot)\subset \mathrm{e}(x,\mathbb{B}_1)\subset E_L(x)$$

Nowa reprezentacja ze zwartym zbiorem sterującym



$$L(x,v)=\begin{cases} +\infty & \text{if } |v|>|x|,\ x\neq 0,\\ \left|\frac{v}{x}\right| & \text{if } |v|\leqslant |x|,\ x\neq 0,\\ 0 & \text{if } v=0,\ x=0,\\ +\infty & \text{if } v\neq 0,\ x=0.\end{cases}$$

Twierdzenie (Misztela)

Załóżmy, że $H(t,x,\cdot)$ *jest wypukłe. Niech* $\operatorname{gph} L(t,x,\cdot) \subset e(t,x,A) \subset E_L(t,x)$ *oraz* $L := H^*$. *Jeżeli* $e(t,x,a) = (f(t,x,a), l(t,x,a))$ *dla każdego* $a \in A$, *to trójka* (A,f,l) *jest reprezentacją* H. *Ponadto* $f(t,x,A) = \operatorname{dom} L(t,x,\cdot)$.

Nowa reprezentacja ze zwartym zbiorem sterującym

Twierdzenie (Misztela)

Załóżmy, że (H1)-(H4), (HLC) *i* (NC) *zachodzą. Wówczas istnieją funkcje* $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}^n$ *oraz* $l : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}$, *t-mierzalne, ze zbiorem sterującym* $A := \mathbb{B}_1 \subset \mathbb{R}^{n+1}$, *takie, że dla dowolnych* $t \in [0,T]$, $x, p \in \mathbb{R}^n$

$$H(t,x,p) = \sup_{a \in A} \{\langle p, f(t,x,a)\rangle - l(t,x,a)\}$$

oraz $f(t,x,A) = \operatorname{dom} H^*(t,x,\cdot)$. *Ponadto zachodzą warunki:*

1. *Dla każdego* $R > 0$ *oraz dowolnych* $t \in [0,T] \setminus \mathcal{N}_R$, $x, y \in \mathbb{B}_R$, $a, b \in A$
$$|f(t,x,a) - f(t,y,b)| \leqslant 10(n+1)(6k_R(t) + M(t) + 1)\big(|x-y| + |a-b|\big)$$
$$|l(t,x,a) - l(t,y,b)| \leqslant 10(n+1)(6k_R(t) + M(t) + 1)\big(|x-y| + |a-b|\big)$$
gdzie $M(t) := |\lambda(t,0)| + |H(t,0,0)| + c(t)(2+R)$.
2. $|f(t,x,a)| \leqslant c(t)(1+|x|)$ *dla dowolnych* $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $a \in A$.
3. *Jeżeli* H, $\lambda(\cdot,\cdot)$, $c(\cdot)$ *są ciągłe, to również* f, l *takie są.*

W szczególności trójka (A, f, l) *jest wiarygodną reprezentacją* H.

Nowa reprezentacja ze zwartym zbiorem sterującym

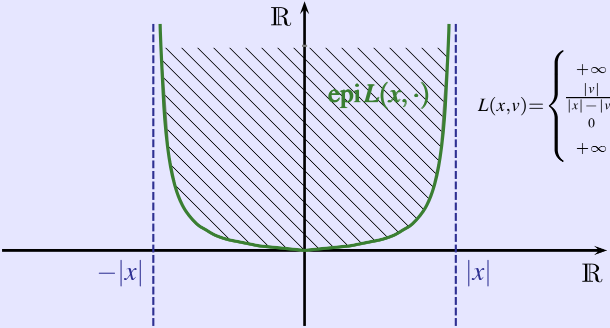
Wróćmy do przykładu $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danego wzorem

$$\boldsymbol{H(x,p) := \max\{|p||x| - 1, 0\}}.$$

Hamiltonian ten spełnia (H1)-(H4) oraz (HLC). Ponadto $L := H^*$ spełnia (NC) z funkcją $\lambda(\cdot) \equiv 1$.

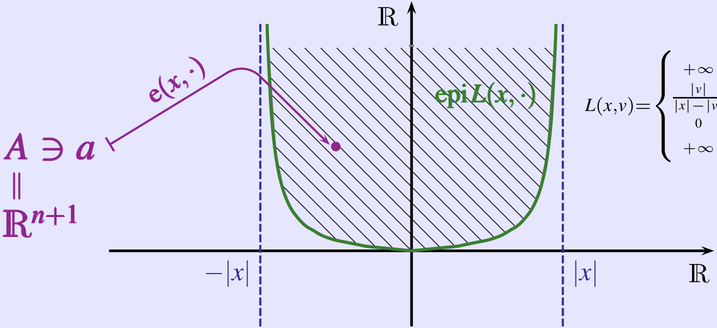
1. RFS konstrukcja reprezentacji (A, f, l) tego hamiltonianu prowadzi do zbioru sterującego $A = [-1, 1]$ oraz funkcji:
$$f(x,a) = a|x|, \qquad l(x,a) = L(x, f(x,a)) = \begin{cases} |a| & \text{if} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{if} \quad x = 0, \end{cases}$$
gdzie l jest nieciągłe.
2. Nasza konstrukcja reprezentacji (A, f, l) tego hamiltonianu prowadzi do zbioru sterującego $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$ oraz functions:
$$f(x, a_1, a_2) = a_1|x|, \qquad l(x, a_1, a_2) = |a_1| + |a_2|(1 - |a_1|),$$
które spełniają warunek Lipachitza.

Nowa reprezentacja z niezwartym zbiorem sterującym



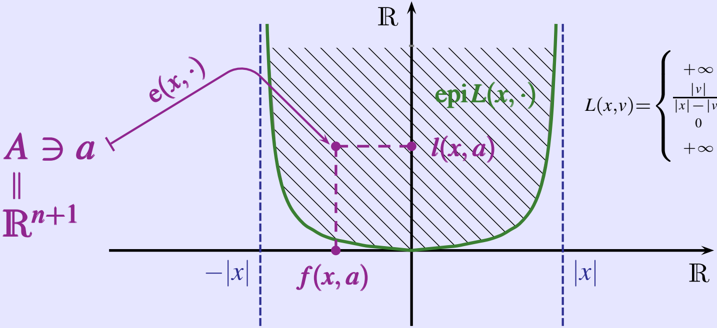
$$L(x,v)=\begin{cases} +\infty & \text{if} \quad |v|\geqslant|x|,\ x\neq 0, \\ \dfrac{|v|}{|x|-|v|} & \text{if} \quad |v|<|x|,\ x\neq 0, \\ 0 & \text{if} \quad v=0,\ x=0, \\ +\infty & \text{if} \quad v\neq 0,\ x=0. \end{cases}$$

Nowa reprezentacja z niezwartym zbiorem sterującym



$$L(x,v)=\begin{cases} +\infty & \text{if } \ |v|\geqslant|x|,\ x\neq 0,\\ \dfrac{|v|}{|x|-|v|} & \text{if } \ |v|<|x|,\ x\neq 0,\\ 0 & \text{if } \ v=0,\ x=0,\\ +\infty & \text{if } \ v\neq 0,\ x=0. \end{cases}$$

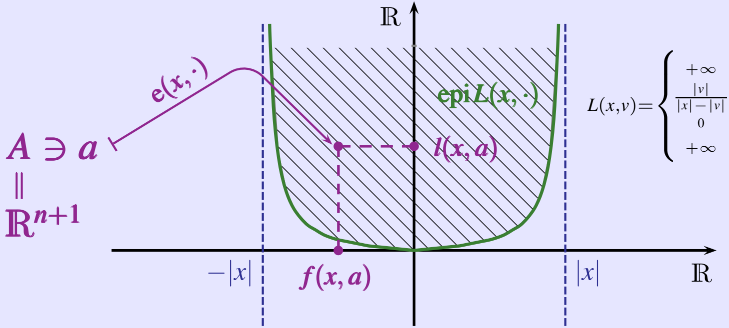
Nowa reprezentacja z niezwartym zbiorem sterującym



$$L(x,v)=\begin{cases} +\infty & \text{if } \ |v|\geqslant|x|,\ x\neq0, \\ \dfrac{|v|}{|x|-|v|} & \text{if } \ |v|<|x|,\ x\neq0, \\ 0 & \text{if } \ v=0,\ x=0, \\ +\infty & \text{if } \ v\neq0,\ x=0. \end{cases}$$

$$\mathrm{e}(x,a)=(f(x,a),l(x,a))$$

Nowa reprezentacja z niezwartym zbiorem sterującym

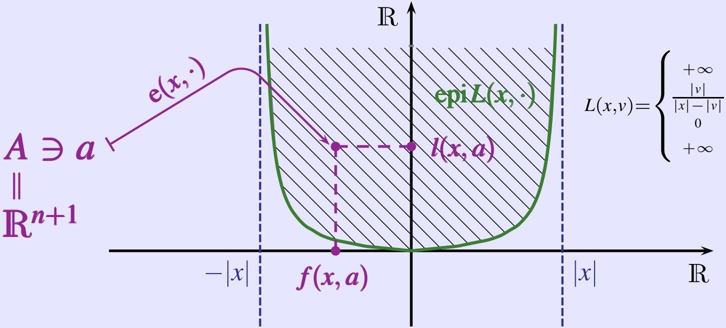


$$L(x,v)=\begin{cases} +\infty & \text{if } |v|\geqslant|x|,\ x\neq 0,\\ \dfrac{|v|}{|x|-|v|} & \text{if } |v|<|x|,\ x\neq 0,\\ 0 & \text{if } v=0,\ x=0,\\ +\infty & \text{if } v\neq 0,\ x=0. \end{cases}$$

$$e(x,a)=(f(x,a),l(x,a))$$

$$\operatorname{gph} L(x,\cdot)\subset e(x,\mathbb{R}^{n+1})=E_L(x)$$

Nowa reprezentacja z niezwartym zbiorem sterującym



$$L(x,v)=\begin{cases} +\infty & \text{if } |v|\geqslant|x|,\ x\neq 0, \\ \dfrac{|v|}{|x|-|v|} & \text{if } |v|<|x|,\ x\neq 0, \\ 0 & \text{if } v=0,\ x=0, \\ +\infty & \text{if } v\neq 0,\ x=0. \end{cases}$$

$$e(x,a) = (f(x,a), l(x,a))$$

$$\mathrm{gph}\, L(x,\cdot) \subset e(x,\mathbb{R}^{n+1}) = E_L(x)$$

Trójka (A,f,l) jest reprezentacją H

Nowa reprezentacja z niezwartym zbiorem sterującym

Twierdzenie (Misztela)

Załóżmy, że (H1)-(H3) *oraz* (HLC) *zachodzą. Wówczas istnieją funkcje* $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}^n$ *oraz* $l : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}$*, t-mierzalne, ze zbiorem sterującym* $A := \mathbb{R}^{n+1}$*, takie, że dla dowolnych* $t \in [0,T]$*,* $x, p \in \mathbb{R}^n$

$$H(t,x,p) = \sup_{a \in A} \{ \langle p, f(t,x,a) \rangle - l(t,x,a) \}$$

oraz $f(t,x,A) = \operatorname{dom} H^*(t,x,\cdot)$*. Ponadto zachodzą warunki:*

1. *Dla każdego* $R > 0$ *oraz dowolnych* $t \in [0,T] \setminus \mathcal{N}_R$*,* $x, y \in \mathbb{B}_R$*,* $a, b \in A$
$$|f(t,x,a) - f(t,y,b)| \leqslant 10(n+1)k_R(t)\big(|x-y| + |a-b|\big)$$
$$|l(t,x,a) - l(t,y,b)| \leqslant 10(n+1)k_R(t)\big(|x-y| + |a-b|\big).$$
2. $l(t,x,a) \geqslant -|H(t,x,0)|$ *dla dowolnych* $t \in [0,T]$*,* $x \in \mathbb{R}^n$*,* $a \in A$*.*
3. *Jeżeli* (H4) *zachodzi, to* $|f(t,x,a)| \leqslant c(t)(1 + |x|)$ *dla dowolnych* $t \in [0,T]$*,* $x \in \mathbb{R}^n$*,* $a \in A$*.*
4. *Jeżeli* H *jest ciągłe, to również* f, l *takie są.*

W szczególności trójka (A, f, l) *jest wiarygodną reprezentacją* H*.*

Stabilność reprezentacji

Twierdzenie (Misztela)

Niech $H_i, H : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ *spełniają* (H1)-(H4), (HLC). *Załóżmy, że* (NC) *zachodzi. Rozważmy reprezentacje* $(\mathbb{B}_1, f_i, l_i)$ *oraz* $(\mathbb{B}_1, f, l)$ *hamiltonianów* H_i *oraz* H *definiowanych jak w dowodzie twierdzenia o reprezentacji. Jeżeli* $H_i(t,\cdot,\cdot)$ *oraz* $\lambda_i(t,\cdot)$ *zbiegają jednostajnie na zbiorach zwartych do* $H(t,\cdot,\cdot)$ *oraz* $\lambda(t,\cdot)$, *ponadto* $c_i(t) \to c(t)$ *dla każdego* $t \in [0,T]$, *to* $f_i(t,\cdot,\cdot)$ *zbiegają do* $f(t,\cdot,\cdot)$ *oraz* $l_i(t,\cdot,\cdot)$ *zbiegają do* $l(t,\cdot,\cdot)$ *na zbiorach zwartych z* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{B}_1$ *dla każdego* $t \in [0,T]$.

Stabilność reprezentacji

Twierdzenie (Misztela)

Niech $H_i, H : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ *spełniają* (H1)-(H4), (HLC). *Załóżmy, że* (NC) *zachodzi. Rozważmy reprezentacje* $(\mathbb{B}_1, f_i, l_i)$ *oraz* $(\mathbb{B}_1, f, l)$ *hamiltonianów* H_i *oraz* H *definiowanych jak w dowodzie twierdzenia o reprezentacji. Jeżeli* $H_i(t,\cdot,\cdot)$ *oraz* $\lambda_i(t,\cdot)$ *zbiegają jednostajnie na zbiorach zwartych do* $H(t,\cdot,\cdot)$ *oraz* $\lambda(t,\cdot)$*, ponadto* $c_i(t) \to c(t)$ *dla każdego* $t \in [0,T]$*, to* $f_i(t,\cdot,\cdot)$ *zbiegają do* $f(t,\cdot,\cdot)$ *oraz* $l_i(t,\cdot,\cdot)$ *zbiegają do* $l(t,\cdot,\cdot)$ *na zbiorach zwartych z* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{B}_1$ *dla każdego* $t \in [0,T]$.

Twierdzenie (Misztela)

Niech $H_i, H : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ *spełniają* (H1)-(H4) *oraz* (HLC). *Rozważmy reprezentacje* $(\mathbb{R}^{n+1}, f_i, l_i)$ *oraz* $(\mathbb{R}^{n+1}, f, l)$ *hamiltonianów* H_i *oraz* H *definiowanych jak w dowodzie twierdzenia o reprezentacji. Jeżeli* $H_i(t,\cdot,\cdot)$ *zbiegają jednostajnie na zbiorach zwartych do* $H(t,\cdot,\cdot)$ *dla każdego* $t \in [0,T]$*, to* $f_i(t,\cdot,\cdot)$ *zbiegają do* $f(t,\cdot,\cdot)$ *oraz* $l_i(t,\cdot,\cdot)$ *zbiegają do* $l(t,\cdot,\cdot)$ *na zbiorach zwartych z* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ *dla każdego* $t \in [0,T]$.

Dziękuję za uwagę!