O pewnym modelu cyklu koniunkturalnego z oczekiwaniami

Robert Kruszewski

Katedra Matematyki i Ekonomii Matematycznej
Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

Zakopane, 12 września 2016

Plan

1. Cel
2. Model Kaldora
3. Funkcja konsumpcji
4. Inwestycje
5. Równowaga, stabilność, bifurkacje
6. Atraktory okresowe i quasi-okresowe. Wielostabilność
7. Podsumowanie

Cel

Głównym celem opracowania jest zbadanie wpływu prostego mechanizmu oczekiwań heterogenicznych na dynamikę modelu Kaldora.

Model Kaldora

- Dyskretna wersja modelu Kaldora

$$\begin{cases} Y_{t+1} = Y_t + \alpha(I_t - (Y_t - C_t)), \ \alpha > 0 \\ K_{t+1} = I_t + (1-\delta)K_t, \ 0 < \delta < 1 \end{cases}$$

Y_t - produkt krajowy w okresie t
K_t - kapitał w okresie t
I_t - inwestycje w okresie t
C_t - konsumpcja w okresie t

- Konsumpcja

$$C_t = C_0 + cE[Y_t], \; 0 < c < 1, \; C_0 > 0$$

- W literaturze najczęściej

$$C_t = C_0 + \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\pi c_2}{2c_1}(Y_t - Y^*)\right), \; C_0, c_1, c_2 > 0$$

gdzie Y^* oznacza egzogeniczny, pożadany (normalny) poziom produktu krajowego.
Herman (1985), Lorenz (1992, 1993), Dotani (1996), Agliari i Dieci (2006)

Oczekiwania

- Zagregowane oczekiwania $E[Y_t]$ są średnią ważoną oczekiwań pierwszego $E^1[Y_t]$ i drugiego $E^2[Y_t]$ typu:

$$E[Y_t] = w_t E^1[Y_t] + (1 - w_t) E^2[Y_t], \ 0 < w_t \leq 1.$$

  Oczekiwania powstają w odniesieniu do egzogenicznego (pożądanego) poziomu produkcji Y^*.

- Oczekiwania pierwszego typu

$$E^1[Y_t] = Y_t + \mu_1 (Y_t - Y^*), \ \mu_1 > 0$$

- Oczekiwania drugiego typu

$$E^2[Y_t] = Y_t + \mu_2 (Y^* - Y_t), \ 0 < \mu_2 < 1$$

- Waga przypisywana oczekiwaniom pierwszego typu

$$w_t = \frac{1}{1 + \gamma^2 (Y_t - Y^*)^2}, \ \gamma > 0$$

- Inwestycje są liniową funkcją kapitału i produktu krajowego

$$I_t = b(K_t^d - K_t) + \delta K_t, \; 0 < b < 1$$

gdzie $K_t^d = kY_t$ $(k > 0)$ jest pożądanym poziomem kapitału w okresie t

- Zatem

$$I_t = bkY_t - (b - \delta)K_t$$

Zakładam, że $b > \delta$.

Model Kaldora z oczekiwaniami

$$\begin{cases} Y_{t+1} = (1-\alpha+\alpha bk)Y_t + \alpha C_0 + \alpha c E[Y_t] - \alpha(b-\delta)K_t \\ K_{t+1} = b(kY_t - K_t) + K_t \end{cases} \tag{1}$$

- Pożądany (normalny) poziom produktu krajowego

$$\begin{cases} Y^* = \frac{C_0}{1-c-\delta k} \\ K^* = kY^* = \frac{kC_0}{1-c-\delta k} \end{cases}$$

Model Kaldora z oczekiwaniami

- Dla uproszczenia analizy badany model (1) zapisuję przy pomocy zmiennych

$$\begin{cases} x_t = K_t - kY^* \\ y_t = Y_t - Y^* \end{cases}$$

wyrażających odchylenia od równowagi (Y^*, K^*)

- W nowych współrzędnych rozważany model przyjmuje postać:

$$\begin{cases} x_{t+1} = (1-b)x_t + bky_t \\ y_{t+1} = (1-\alpha+\alpha bk)y_t + \alpha(\delta-b)x_t + \alpha cE[y_t] - \frac{\alpha cC_0}{1-c-\delta k} \end{cases} \tag{2}$$

Położenia równowagi

Badany model (2) posiada

- jeden punkt stały $F^* = (0,0)$, jeśli $0 < c < \frac{1-\delta k}{1+\mu_1}$ lub

  $1 - \delta k < 0$
- trzy punkty stałe: $F^* = (0,0)$ i dwa dodatkowe punkty stałe F_1^* oraz F_2^* symetryczne względem F^*, jeśli $1 - \delta k > 0$ i $\frac{1-\delta k}{1+\mu_1} < c < \min\{1, \frac{1-\delta k}{1-\mu_2}\}$

Stabilność lokalna i bifurkacje

- Macierz Jacobiego modelu (2)

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} 1-b & bk \\ \alpha(\delta - b) & 1-\alpha+\delta bk+\alpha c\frac{dE[y]}{dy} \end{bmatrix}$$

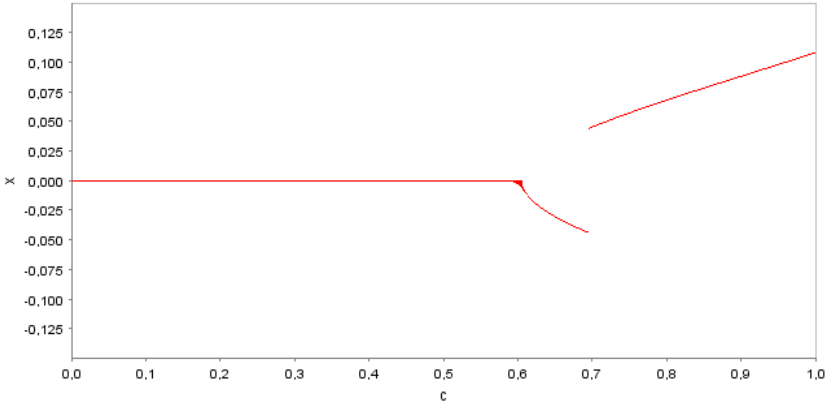
- Macierz linearyzacji dla F^*

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} 1-b & bk \\ \alpha(\delta - b) & 1-\alpha+\delta bk+\alpha c(1+\mu_1) \end{bmatrix}$$

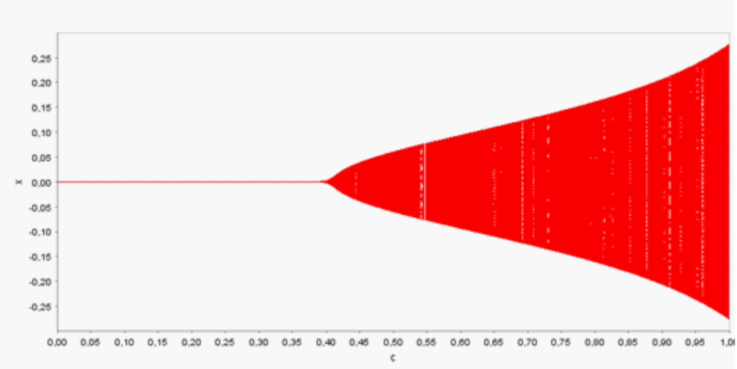
- Równowaga F^* jest blokalnie asymptotycznie stabila, jeśli

$$\begin{aligned} 1+trJ(0,0)+\det J(0,0) &> 0 \\ 1-trJ(0,0)+\det J(0,0) &> 0 \\ 1-\det J(0,0) &> 0 \end{aligned}$$

Bifurkacja widelcowa (pitchfork)

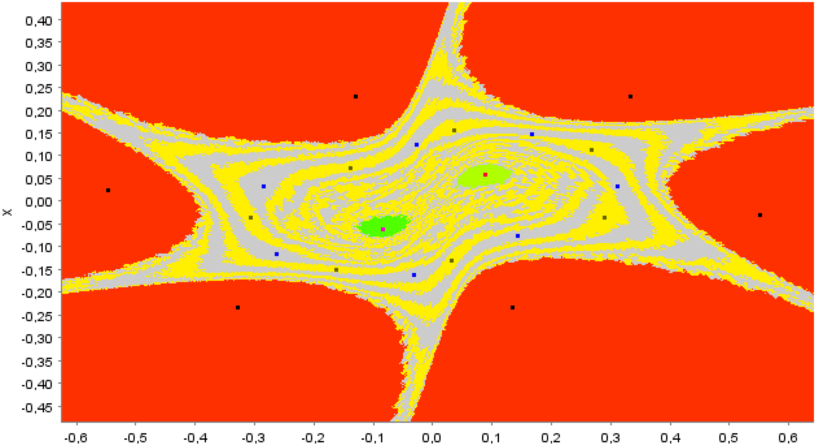


Bifurkacja Neimarka-Sackera

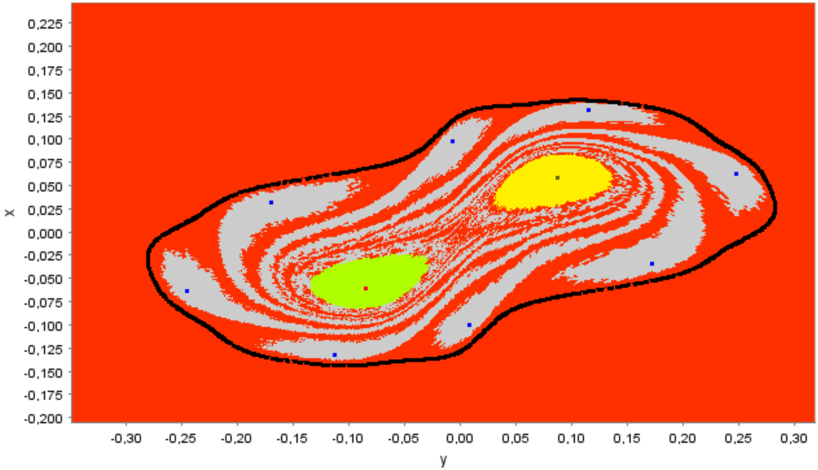


Atraktory i ich obszary przyciągania

- Wielostabilność czyli współistnienie kilku atraktorów dla tej samej konfiguracji parametrów



Atraktory okresowe i quasi-okresowe



Podsumowanie

- Uwzględnienie elementów behawioralnych
- Inne spojrzenie na dynamikę produktu krajowego, które jest zbieżne z klasycznym nieliniowym modelem Kaldora
- Niestabilność równowagi stacjonarnej nie oznacza niestabilności modelu
- Model nieliniowy oprócz równowagi stacjonarnej posiada także atraktory okresowe i quasi-okresowe (wielostabilność)

Dziękuję za uwagę!