

prof. dr hab. Zbigniew Peradzyński

E-mail: zperadz@mimuw.edu.pl

dr Joanna Napiórkowska

Wydział Cybernetyki WAT

E-mail: joanna.napiorkowska@wat.edu.pl

O badaniu niestabilności równań różniczkowych cząstkowych

Omówimy tu przedstawioną w książce G. B. Whithama [1] mało znaną metodę poszukiwania niestabilności rozwiązań układów równań cząstkowych. W podejściu prezentowanym w [1] metoda ta może być stosowana do równań bądź układów równań hiperbolicznych w sytuacji, gdy w układzie występują małe (lub duże) parametry, co pozwala zaniedbać pewne człony. Po zaniedbaniu tych członów otrzymujemy tzw. układ zredukowany. Jeśli teraz prędkości charakterystyczne układu zredukowanego nie są odpowiednio zgodne z prędkościami układu wyjściowego, to rozwiązania układu wyjściowego są niestabilne (zaburzenia narastają wykładniczo w czasie). Weźmy najprostszy przykład

$$\varepsilon(u_{tt} - c^2 u_{xx}) + u_t + v_0 u_x = 0. \quad (1)$$

Prędkości charakterystyczne dla równania wyjściowego (1) to $v_1 = -c$ oraz $v_2 = c$, podczas gdy prędkość charakterystyczna dla równania zredukowanego ($\varepsilon = 0$) wynosi v_0 . Jeśli $-c < v_0 < c$, wówczas rozwiązania równania (1) (z $\varepsilon \neq 0$) są stabilne. Jeśli natomiast $v_0 \notin [-c, c]$, to rozwiązania tego równania są niestabilne.

Możemy powiedzieć, że jeśli występuje sprzeczność kauzalna pomiędzy dwoma poziomami opisu:

a) opis pełny — w naszym przykładzie równanie (1),

b) opis uproszczony — w naszym przykładzie równanie (1) z $\varepsilon \neq 0$,

wówczas rozwiązania pełnego układu są niestabilne. Sprzeczność kauzalna polega na tym, że zaburzenia dla układu zredukowanego poruszają się szybciej niż zaburzenia dla układu wyjściowego.

Pokażemy, jak można uogólnić warunki G. B. Whithama na nieliniowe układy wielu równań hiperbolicznych [2], a także na układy równań reakcji-dyfuzji występujące w biologii (chemotaksja, chemorepulsja [3]).

Literatura

- [1] G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Pure and Applied Mathematics, John Wiley and Sons, 1974.
- [2] Z. Peradzyński, K. Makowski, S. Barral, J. Kurzyna, M. Dudeck (eds.), *The Role of the Electron Energy Balance in Hall Thruster Plasma Instabilities*, Proc. 30th International Electric Propulsion Conference, Florence (Italy), No. 07-258, IEPC07, The Electric Rocket Propulsion Society, Worthington, OH, IEPC-pub, 2007.
- [3] J. I. Tello, D. Wrzosek, *Inter-Species Competition and Chemorepulsion*, AIMS' Journals, przyjęte.