

dr Arkadiusz Misztela  
 Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego  
 E-mail: arke@mat.umk.pl

## Reprezentacja równania Hamiltona–Jacobiego w teorii sterowania optymalnego

Równanie Hamiltona–Jacobiego z hamiltonianem  $H$  i warunkiem początkowym  $g$

$$\begin{aligned} V_t + H(t, x, V_x) &= 0 \quad \text{na } [0, T] \times \mathbb{R}^n \\ V(0, x) &= g(x) \quad \text{na } \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{HJ}$$

opisuje się za pomocą problemów sterowania optymalnego, jeżeli istnieją domknięty zbiór parametrów sterujących  $A$ , odpowiednio regularna dynamika  $f$  oraz lagrangian  $l$ , które spełniają następującą równość:

$$H(t, x, p) = \sup_{a \in A} \{ \langle p, f(t, x, a) \rangle - l(t, x, a) \}. \tag{1}$$

Opis równania (1) z wykorzystaniem problemów sterowania optymalnego realizuje się poprzez funkcję wartości określoną dla każdego  $(\tau, \xi) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$  wzorem

$$V(\tau, \xi) := \inf_{a(\cdot)} \left\{ g(x_a(0)) + \int_0^\tau l(t, x_a(t), a(t)) dt \right\},$$

gdzie  $a(\cdot)$  jest sterowaniem o wartościach w zbiorze  $A$ , zaś  $x_a(\cdot)$  rozwiązaniem równania

$$\dot{x}_a(t) = f(t, x_a(t), a(t)) \quad \text{dla p.w. } t \in [0, \tau] \quad \text{takim, że } x_a(\tau) = \xi.$$

Trójkę  $(A, f, l)$  o powyższych własnościach będziemy nazywać *wiarygodną reprezentacją* hamiltonianu  $H$ . Wprowadzenie nazwy „wiarygodna reprezentacja” jest uzasadnione tym, że trójka  $(A, f, l)$  spełniająca równość (1) nie jest wyznaczona jednoznacznie i może być całkowicie nieregularna.

Istnienie wiarygodnych reprezentacji dla hamiltonianów wypukłych ze względu na  $p$  najpierw badał Rampazzo [3], a następnie Frankowska–Sedrakyan [1]. Rampazzo koncentrował się na badaniu ciągłych reprezentacji ze względu na wszystkie zmienne. Tymczasem Frankowska–Sedrakyan badali mierzalne reprezentacje ze względu na  $t$  oraz ich stabilność. Zarówno Rampazzo jak i Frankowska–Sedrakyan swoje rezultaty otrzymują zakładając pewien silny techniczny warunek.

Rampazzo w pracy [3] postawił problem, jak osłabić wspomniany techniczny warunek. Pokażemy, że ten warunek nie tylko można osłabić, ale całkowicie wyeliminować. W tym celu będziemy potrzebować nowej konstrukcji wiarygodnej reprezentacji, którą przedstawimy podczas referatu.

### Bibliografia

- [1] H. Frankowska, H. Sedrakyan, *Stable representation of convex Hamiltonians*, *Nonlinear Anal.* 100 (2014), 30–42.
- [2] A. Misztela, *Representation of convex Hamilton–Jacobi equations in optimal control theory*, 27 pages, arXiv:1507.01424v1.
- [3] F. Rampazzo, *Faithful representations for convex Hamilton–Jacobi equations*, *SIAM J. Control Optim.* 44 (2005), 867–884.