

dr hab. Marek Bodnar, dr hab. Urszula Foryś  
 Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki  
 Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki

## Opóźnienie nie powoduje oscylacji w poprawionym modelu humoralnej odpowiedzi odpornościowej

W roku 2013 Feyissa i Banerjee zaproponowali model opisujący humoralną odpowiedź systemu odpornościowego w kontekście reakcji układu odpornościowego na komórki rakowe (por. [1]). Zaproponowany model składa się z czterech równań różniczkowych z opóźnieniem. Pokazujemy, że rozwiązania tego modelu mogą przyjmować wartości ujemne. Dlatego też proponujemy modyfikację modelu, która polega na modyfikacji niektórych składników i dodaniu dodatkowego równania. Gdy założymy, że komórki rakowe nie wywołują odpowiedzi odpornościowej, zaproponowany model redukuje się do trzech równań różniczkowych bez opóźnienia:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= k(\alpha - \eta x(t) - x(t)y(t)), \\ \dot{y}(t) &= \gamma y(t)(1 - y(t) - z(t)) - x(t)y(t), \\ \dot{z}(t) &= x(t)y(t) - z(t),\end{aligned}$$

gdzie  $x$ ,  $y$ ,  $z$  oznaczają, odpowiednio, przeskalowane stężenia przeciwciał, komórek rakowych oraz komórek rakowych uszkodzonych przez układ odpornościowy. Dla uproszczonego modelu przeprowadziliśmy jego analizę, udowodniliśmy twierdzenia dotyczące asymptotycznej stabilności punktów stacjonarnych oraz przeprowadziliśmy analizę numeryczną modelu. Wykazaliśmy, że model ma bogatą dynamikę: dla pewnych zakresu parametrów wszystkie rozwiązania modelu zbiegają do jednego punktu stacjonarnego, podczas gdy dla innych występuje bi-stabilność lub cykle graniczne. Numerycznie porównaliśmy dynamikę uproszczonego modelu z dynamiką pełnego modelu dla parametrów zaczerpniętych z literatury. Symulacje wskazują na brak istotnych różnic w dynamice obu modeli w przypadku, gdy odpowiedź układu odpornościowego jest słaba.

### Bibliografia

- [1] M. Bodnar, U. Foryś, *Delays do not cause oscillations in a corrected model of humoral mediated immune response*, Appl. Math. Comput. 289 (2016), 7–21.
- [2] S. Feyissa, S. Banerjee, *Delay-induced oscillatory dynamics in humoral mediated immune response with two time delays*, Nonlinear Analysis: Real World Applications 14 (2013), 35–52.

**Podziękowania.** Praca jest finansowana w ramach projektu Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego Iuventus Plus nr IP2011 041971.