dr hab. A. Karczewska, prof. dr hab. P. Rozmej,
mgr M. Szczeciński, B. Boguniewicz
Uniwersytet Zielonogórski

Metoda elementów skończonych dla uogólnionego równania KDV

Równania typu KDV opisują ewolucję fal solitonowych na płytkiej wodzie, przy założeniu nieściśliwości, bezwirowości i nielepkości płynu, a także stałej głębokości. Pierwsze udokumentowane odkrycie tego typu fal przypisuje się S. Russelowi (1834). Jako pierwsi próbę teoretycznego objaśnienia ewolucji solitonów dokonali niezależnie J. V. Boussinesq i J. Rayleigh (1870), jednak zauważone zostały dopiero badania w tym kierunku D. J. Kortewega oraz G. de Vriesa (1895). W niniejszej pracy zajmujemy się równaniem uogólnionym rzędu drugiego wyprowadzonym w pracach A. Karczewskiej, P. Rozmeja, Ł. Rutkowskiego, *A new nonlinear equation in the shallow water wave problem*, Physica Scripta 89 (2014) 054026, oraz A. Karczewskiej, P. Rozmeja, E. Infelda, *Shallow-water soliton dynamics beyond the Korteweg–de Vries equation*, Physical Review E 90 (2014) 012907, postaci

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x + \frac{1}{6}\beta\eta_{3x} + \frac{3}{8}\alpha^2\eta^2\eta_x + \alpha\beta\Big(\frac{23}{24}\eta_x\eta_{2x} + \frac{5}{12}\eta\eta_{3x}\Big) + \frac{19}{360}\beta^2\eta_{5x}$$
$$+ \beta\delta\Big(-\frac{1}{2\beta}(h\eta)_x + \frac{1}{4}(h_{2x}\eta)_x - \frac{1}{4}(h\eta_{2x})_x\Big) = 0.$$

Prezentujemy wyniki dla równania opisującego ewolucję fali przy płaskim dnie ($\delta = 0$). Uzyskaliśmy wyniki również dla dna nierównego, a także dla stochastycznej postaci powyższego równania. W symulacjach numerycznych wykorzystaliśmy metodę wykorzystaną przez Debussche i Printemsa (1999) dla równania KDV rzędu pierwszego. Dyskretyzacji zmiennej czasowej dokonaliśmy metodą Cranka–Nicholsona, z kolei dla zmiennej przestrzennej wykorzystaliśmy schemat Petrova–Galerkina z kawałkami liniowymi funkcjami kształtu oraz kawałkami stałymi funkcjami testowymi. Metoda ta jest możliwa do zastosowania w symulacjach ewolucji fali solitonowej dla stochastycznej postaci równania KDV. Wspomniane schematy pozwoliły nam uzyskać układ równań nieliniowych dla solitonu w n-tym kroku czasowym ($n = 1, 2, 3, \dots$), który można rozwiązać metodą Newtona–Raphsona. Wyniki okazały się identyczne z tymi uzyskanymi metodą różnic skończonych dla rozpatrywanego równania (Karczewska, Rozmej, Rutkowski (2014), Karczewska, Rozmej, Infeld (2014)). Ponadto przeprowadziliśmy również symulacje dla rozwiązania knoidalnego równania KDV postaci

$$\eta(x,t) = \eta_2 + H\,\mathrm{cn}^2\Big(\frac{x-ct}{\Delta}\;\Big|\;m\Big),$$

gdzie $\eta_2 = \frac{H}{m}(1 - m - \frac{E(m)}{K(m)})$, $\Delta = h\sqrt{\frac{4mh}{3H}}$ oraz $c = \sqrt{gh}\big[1 + \frac{H}{mh}(1 - \frac{m}{2} - \frac{3E(m)}{2K(m)})\big]$, przy czym H oznacza wysokość fali, h — średnią głebokość wody, g — przyspieszenie ziemskie, a $m \in [0,1]$ jest parametrem eliptycznym. Poprzez $K(m)$ i $E(m)$ rozumiemy całki eliptyczne zupełne, odpowiednio, pierwszego i drugiego rodzaju.