dr Andrzej Just, dr Zdzisław Stempień
Politechnika Łódzka

Zadanie sterowania optymalnego opisane wielowymiarowym równaniem belki i jego aproksymacja typu Galerkina

W referacie rozważamy zadanie sterowania optymalnego, które opisane jest wielowymiarowym nieliniowym równaniem belki postaci

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \Delta^2 y - \Big(\alpha + \beta \displaystyle\int_\Omega |\nabla y|^2 \, dx\Big) \Delta y = f & \text{na } Q \\ y(t,x) = \dfrac{\partial y(t,x)}{\partial \nu} = 0 & \text{na } \Sigma \\ y(0,x) = y_0(x), \ \dfrac{\partial y(0,x)}{\partial t} = y_1(x) & \text{na } \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Zmienna przestrzenna $x \in \Omega$, który jest otwartym i ograniczonym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ z odpowiednio gładkim brzegiem Γ, zmienna czasowa $t \in (0,T)$ dla $T < \infty$, $Q = (0,T) \times \Omega$ oraz $\Sigma = (0,T) \times \Gamma$. Elementy $f, \ y_0, \ y_1$ są zadanymi funkcjami, a stałe $\alpha, \beta > 0$. Rozważamy równanie drgań belki (1) w słabym sensie tzn. szukamy funkcji

$$y \in W = \{\omega \mid \omega \in L^2(S; H_0^2(\Omega)), \ \omega' \in L^2(S; L^2(\Omega)) = L^2(Q), \ \omega'' \in L^2(S; H^{-2}(\Omega))\},$$

która spełnia równanie wariacyjne postaci

$$\begin{cases} \langle y''(t), z\rangle + \langle \Delta y(t), \Delta z\rangle - \big(\alpha + \beta \big\| \nabla y(t) \big\|_0^2\big) \langle \Delta y(t), z\rangle = \langle f(t), z\rangle \quad \forall z \in V \\ y(0) = y_0, \ y'(0) = y_1, \end{cases} \tag{2}$$

gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest relacją dualności między odpowiednimi przestrzeniami.

Z literatury wiadomo, że przy odpowiednich założeniach istnieje słabe rozwiązanie równania (1). Zadanie sterowania optymalnego dla rozważanego równania, z prawą stroną postaci $f = g + Bu$, polega na minimalizacji kwadratowego wskaźnika jakości. Zadanie to posiada co najmniej jedno rozwiązanie $u^0 \in U$, gdzie U jest przestrzenią Hilberta. Do rozważanego zadania sterowania stosujemy skończeniewymiarową aproksymację typu Galerkina względem zmiennej przestrzennej oraz dla przestrzeni sterowań U i dowodzimy twierdzenia o istnieniu rozwiązań optymalnych dla zadań po aproksymacji oraz ich słabej zbieżności do jakiegoś rozwiązania wyjściowego zadania sterowania w odpowiednich przestrzeniach.