Równania stochastyczne — zadania przygotowujące do II kolokwium (część II)

Zadanie 14 Wykaż, że dla $x, \sigma, b \in \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jeden proces $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ taki, że

$$X_t = x + \sigma \int_0^t X_s \, dW_s + b \int_0^t X_s \, ds.$$

Ponadto oblicz EX_t oraz znajdź stochastyczne równanie różniczkowe spełnione przez X^2 i e^X.

Zadanie 15 Rozwiąż równanie

$$dX = \frac{1}{2}\sigma'(X)\sigma(X)\, dt + \sigma(X)\, dW, \quad X(0) = 0,$$

gdzie W jest jednowymiarowym procesem Wienera, a σ jest funkcją gładką i dodatnią.

Zadanie 16 Niech funkcja $u\colon [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie gładkim rozwiązaniem równania

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Korzystając z formuły Itô wykaż, że wówczas dla wszystkich $t > 0$ zachodzi $E(u(t, W_t)) = u(0, 0)$.

Zadanie 17 Znajdź rozwiązania równań:
a) $dX_t = (a_1(t)X_t + a_2(t))\, dt + (b_1(t)X_t + b_2(t))\, dW_t$,
b) $dX_t = aX_t(1 - X_t/k)\, dt + bX_t\, dW_t$,
c) $dX_t = (aX_t + rX_t \ln(k/X_t))\, dt + bX_t\, dW_t$.

Zadanie 18 Znajdź generatory następujących dyfuzji Itô:
a) Procesu Ornsteina-Uhlenbecka $dX_t = \mu X_t\, dt + \sigma\, dW_t$ ($W_t \in \mathbb{R}$, μ, σ — stałe);
b) Geometrycznego ruchu Browna $dX_t = rX_t\, dt + \alpha X_t\, dW_t$ ($W_t \in \mathbb{R}$, r, α — stałe);
c) $dY_t = r\, dt + \alpha Y_t\, dW_t$ ($W_t \in \mathbb{R}$, r, α — stałe);
d) $dY_t = \begin{bmatrix} dt \\ dX_t \end{bmatrix}$, gdzie X_t jest takie jak w a);
e) $\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ X_2 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{X_1} \end{bmatrix} dW_t$ ($W_t \in \mathbb{R}$);
f) $\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dW_1 \\ dW_2 \end{bmatrix}$;
g) $X(t) = (X_1, X_2, ..., X_n)$, gdzie $dX_k(t) = r_k X_k\, dt + X_k \sum_{j=1}^n \alpha_{kj}\, dW_j$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, $((W_1, ..., W_n)$ jest n-wymiarowym procesem Wienera, r_k i α_{kj} — stałe).

Zadanie 19 Znajdź dyfuzję Itô (tzn. stochastyczne równanie różniczkowe spełnione przez nią), której generator ma postać:
a) $Af(x) = f'(x) + f''(x)$, $f \in C_0^2(\mathbb{R})$;
b) $Af(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t} + cx\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f \in C_0^2(\mathbb{R}^2)$, c, α — stałe;
c) $Af(x_1, x_2) = 2x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ln(1 + x_1^2 + x_2^2)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{1}{2}(1 + x_1^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + x_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$, $f \in C_0^2(\mathbb{R}^2)$.

UWAGA: Do rozwiązania zadań 18 i 19 wystarczy tylko znajomość twierdzenia z ostatniego wykładu, które tu przypominam:

Twierdzenie. *Niech X_t będzie dyfuzją Itô $dX_t = b(X_t)\, dt + \sigma(X_t)\, dW_t$. Jeśli $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, to $f \in D_A$ i*

$$Af(x) = \sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n (\sigma\sigma^T)_{i,j}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$