

Równania stochastyczne — zadania przygotowujące do II kolokwium (część I)

Zadanie 1. Korzystając z definicji oblicz $\int_0^t 2\operatorname{sgn}(s+4) dW_s$.

Zadanie 2. Oblicz $E[(\int_0^t e^{3s} dW_s)^2]$.

Zadanie 3. Korzystając z definicji wykaż, że $\int_0^t (2s+3) dW_s = (2t+3)W_t - 2\int_0^t W_s dt$.

Zadanie 4. Użyj formuły Itô, aby zapisać następujące procesy stochastyczne X_t w standardowej formie $dX_t = u(t, \omega) dt + v(t, \omega) dW_t$:

a) $X_t = \sin(t + W_t)$,

b) $X_t = (tW_1(t) + W_3(t)e^{W_2(t)}, (t + W_3(t))^3)$.

Zadanie 5. Korzystając z formuły Itô oblicz poniższe całki Itô:

a) $\int_0^t W_s^k dW_s$,

b) $\int_0^t e^{W_s} dW_s$,

c) $\int_0^t \sin(W_s) dW_s$.

Zadanie 6. Znajdź różniczkę stochastyczną dX_t procesu $X_t = \sinh W_t$. Jakie równanie spełnia ten proces?

Zadanie 7. Znajdź różniczkę stochastyczną sumy, różnicy i ilorazu procesów.

Zadanie 8. Niech $dX_t = a(t) dt + b(t) dW_t$. Znaleźć różniczkę stochastyczną dY_t procesu $Y_t = e^{X_t}$. Jakie równanie spełnia proces Y_t , jeśli założymy, że $2a(t) = -b^2(t)$?

Zadanie 9. Rozwiąż równanie $dX_t = \mu X_t dt + \sigma dW_t$, $t \geq 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Znajdź EX_t i $\operatorname{Var}X_t$.

Zadanie 10. Znajdź rozwiązanie $X_t = (X_1(t), X_2(t))$ układu równań $dX_t = -\frac{1}{2}X_t dt + MX_t dW_t$, gdzie $M = \begin{pmatrix} 0 & -a/b \\ b/a & 0 \end{pmatrix}$

Zadanie 11. Rozwiąż równania:

a) $dX_t = (\frac{2}{t+1}X_t + b(1+t)^2) dt + b(1+t)^2 dW_t$, $X_0 = 1$,

b) $dX_t = (aX_t + c) dt + (bX_t + d) dW_t$,

c) $dX_t = \frac{b-X_t}{T-t} dt + dW_t$, $0 \leq t < T$, $X_0 = 1$.

Zadanie 12. Stosując podstawienie $X_t = u(W_t)$ rozwiąż równanie $dX_t = -\frac{1}{2}e^{-2X_t} dt + e^{-X_t} dW_t$, $X_0 = x_0$.

Zadanie 13. Rozwiąż równanie $dX_t = \theta(\gamma - X_t) dt + \sqrt{2\tau} dW_t$. Wyznacz EX_t i $\operatorname{Var}X_t$.