

Równania stochastyczne — zadania przygotowujące do I kolokwium (część II)

Zadanie 10 Niech W będzie procesem Wienera. Wykazać, że procesy otrzymane za pomocą następujących transformacji są procesami Wienera:

a) $Y_t = \begin{cases} tW_{1/t} & \text{dla } t > 0, \\ 0 & \text{dla } t = 0. \end{cases}$

b) $B_t = \begin{cases} W_t & \text{dla } t \leq T, \\ 2W_T - W_t & \text{dla } t > T. \end{cases}$

Zadanie 11 Niech $W_t, t \in [0, 1]$ będzie procesem Wienera. Wykazać, że wówczas

$$B_t = (1+t) \left(W_{t/(1+t)} - \frac{t}{t+1} W_1 \right), \quad t \in [0, \infty)$$

jest procesem Wienera na $[0, \infty)$.

Zadanie 12 Niech W będzie standardowym procesem Wienera i niech $X(t) := \exp\{i\theta W(t) + \frac{1}{2}\theta^2 t\}$. Pokaż, że X jest martyngałem względem filtracji danej przez $\mathcal{F}_t = \sigma(W(u) : 0 \leq u \leq t)$.

Zadanie 13 Znajdź rozkład zmiennej $4W_2 - W_4 + W_6$.

Zadanie 14 Dla jakich parametrów a i b zmienne $aW_1 - W_2$ oraz $W_3 + bW_5$ są niezależne?

Zadanie 15 Niech W_t będzie standardowym procesem Wienera. Wyznacz wartość oczekiwaną, kowariancję i wariancję procesów:

a) $X_t = W_{t+L} - W_t$, gdzie L — stała dodatnia;

b) $X_t = At + W_t$, gdzie A — stała dodatnia,

c) $X_t = At + W_t$, gdzie A zmienna losowa niezależna od W_t o rozkładzie $N(m, \sigma)$.

Zadanie 16 Niech W_t oznacza standardowy proces Wienera z naturalną filtracją $\mathcal{F}_t = \sigma(W_u : 0 \leq u \leq t)$. Dla $0 < t < s$ oblicz $E(W_s^3 | \mathcal{F}_t)$.

Zadanie 17 Niech W_t oznacza standardowy proces Wienera. Oblicz wartość oczekiwaną, kowariancję i wariancję dla następujących procesów:

a) mostu Browna: $X_t = W_t - tW_1, t \in [0, 1]$;

b) ruchu Browna z dryfem: $X_t = \mu t + \sigma W_t, t \geq 0$;

c) geometrycznego ruchu Browna: $X_t = e^{\mu t + \sigma W_t}, t \geq 0$;

d) kolorowego szumu: $X_t = \frac{W_{t+h} - W_t}{h}, t \geq 0, h > 0$ — ustalone;

e) procesu Ornsteina-Uhlenbecka: $X_t = e^{-t} W_{e^{2t}}, t \geq 0$.