Równania stochastyczne — zadania przygotowujące do I kolokwium (część I)

Zadanie 1 Weźmy $\Omega = [0,1]$, σ-ciało zbiorów borelowskich i P miarę Lebesgue'a na $[0,1]$. Znajdź $E[X|Y]$, jeśli:
a)

$$X(x) = 3x^3, \quad Y(x) = \begin{cases} 3 & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 6 & x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), \\ 1 & x \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

b)

$$X(x) = 3x^2, \quad Y(x) = \begin{cases} x & x \in [0, \frac{1}{3}], \\ 4 & x \in (\frac{1}{3}, 1]. \end{cases}$$

c)

$$X(x) = 4x^3, \quad Y(x) = |2x-1|.$$

d)

$$X(x) = 3x^2, \quad Y(x) = \begin{cases} 3x & x \in [0, \frac{1}{3}), \\ 3x-1 & x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), \\ 3x-2 & x \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Zadanie 2 Niech $\{S_n\}$ będzie symetrycznym błądzeniem losowym z naturalną filtracją $\{\mathcal{F}_n\}$ (tzn. $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, ..., S_n)$). Wykazać, że $Y_n := (-1)^n \cos(\pi S_n)$ dla $n \in \mathbb{N}$ jest martyngałem względem $\{\mathcal{F}_n\}$.

Zadanie 3 Niech $\{Y_n\}$, $n \geqslant 1$, będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych spełniających $EY_n = 0$ dla każdego $n \geqslant 1$. Sprawdzić, które z następujących ciągów $\{X_n\}$ są martyngałami względem $\{Y_n\}$:
a) $X_n = n^{-1}(Y_1 + ... + Y_n)$,
b) $X_n = Y_1 \cdots Y_n$,
c) $X_n = (Y_1 \cdots Y_n)^{1/n}$,
d) $X_n = e^{Y_1 + ... + Y_n}$.

Zadanie 4 Niech $\{Y_n\}$, $n \geqslant 0$, będzie łańcuchem Markowa z prawdopodobieństwami przejść: $p(0,0) = 1$, $p(x, x+1) = p$, $p(x, 0) = q$, gdzie $p > 0$, $(p+q) = 1$ i $x = 1, 2, ...$ Dla dowolnych ustalonych stałych a i b zdefiniujmy

$$X_n = \begin{cases} ap^{1-Y_n} + b(1 - p^{1-Y_n}) & \text{dla} \quad Y_n > 0, \\ b & \text{dla} \quad Y_n = 0. \end{cases}$$

Pokaż, że $\{X_n\}$ jest martyngałem względem $\{Y_n\}$.

Zadanie 5 Niech $\{Y_n\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie i zerowej średniej. Niech $X_0 = Y_0$ i $X_n = \sum_{k=1}^n Y_{k-1} y_k$. Wykaż, że $\{X_n\}$ jest martyngałem względem $\{Y_n\}$.

Zadanie 6 (Urna Polya) Urna zawiera 1 kulę czarną i 1 białą. W kolejnych momentach czasu losujemy 1 kulę z urny i zwracamy ją wraz z dodatkową kulą tego samego koloru. Po czasie n mamy w urnie $n+2$ kule, z czego $B_n + 1$ jest białych. Niech $M_n = \frac{B_n+1}{n+2}$ — proporcja kul białych do całości. Wykaż, że ciąg $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest martyngałem (względem naturalnej filtracji).

Zadanie 7 Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną z filtracją, zaś $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będą dwoma określonymi na tej przestrzeni całkowalnymi w kwadracie martyngałami. Wykaż, że:
a) $E(X_m Y_n | \mathcal{F}_m) = X_m Y_m$ dla $m \leqslant n$,
b) $E(X_n Y_n) - E(X_0 Y_0) = \sum_{k=1}^n E((X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1}))$,
c) $Var X_n = Var X_0 + \sum_{k=1}^n Var(X_k - X_{k-1})$,
d) Zmienne losowe X_0, $X_k - X_{k-1}$ $(k > 0)$ tworzą układ ortogonalny w L^2.

Zadanie 8 Niech τ będzie momentem stopu względem filtracji $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Czy momentem stopu jest też:
a) $\tau + 1$,
b) $\tau - 1$,
c) τ^2.

Zadanie 9 Rozpatrzmy symetryczne błądzenie losowe startujące z zera. Niech τ będzie momentem dotarcia do punktu 1. Wyznacz $\mathcal{F}_\tau$.