

Równania stochastyczne. Kolokwium numer I

4 kwietnia 2011 r. Grupa C

Zadanie 1. (15 punktów) Rozpatrzmy $\Omega = [0, 1]$, σ -ciało zbiorów borelowskich i P miarę Lebesgue'a na $[0, 1]$. Opisz $\sigma(Y)$ i znajdź $E[X|Y]$, jeśli

$$X(x) = e^{2x}, \quad Y(x) = \begin{cases} 2 & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 3 & x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), \\ x & x \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

Zadanie 2. (10 punktów) Niech X_1, X_2, \dots będą niezależnymi nieujemnymi zmiennymi losowymi o wartościach oczekiwanych odpowiednio a_1, a_2, \dots ($a_i > 0$). Wykaż, że wówczas:

a) $U_n := \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n a_i, n \in \mathbb{N}$,

b) $V_n := \frac{X_1 \cdots X_n}{a_1 \cdots a_n}, n \in \mathbb{N}$

są martyngałami względem naturalnej filtracji generowanej przez zmienne X_1, X_2, \dots (tzn. przez $\{\mathcal{F}_n\}$, gdzie $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$).

Zadanie 3. (15 punktów) Niech W_t będzie standardowym procesem Wienera z naturalną filtracją $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s : 0 \leq s \leq t)$. Sprawdź, czy proces $X_t = \frac{1}{2}(W_{4t+3} - W_3)$ jest:

a) martyngałem względem filtracji $\{\mathcal{F}_{4t+3}\}$,

b) procesem Wienera.

Zadanie 4. (10 punktów) Niech W_t oznacza standardowy proces Wienera. Oblicz wartość oczekiwaną, kowariancję i wariancję dla procesu

$$X_t = (t + 3)W_2 + 3W_t - W_{t+2}.$$

Równania stochastyczne. Kolokwium numer I

4 kwietnia 2011 r. Grupa C

Zadanie 1. (15 punktów) Rozpatrzmy $\Omega = [0, 1]$, σ -ciało zbiorów borelowskich i P miarę Lebesgue'a na $[0, 1]$. Opisz $\sigma(Y)$ i znajdź $E[X|Y]$, jeśli

$$X(x) = e^{2x}, \quad Y(x) = \begin{cases} 2 & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 3 & x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), \\ x & x \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

Zadanie 2. (10 punktów) Niech X_1, X_2, \dots będą niezależnymi nieujemnymi zmiennymi losowymi o wartościach oczekiwanych odpowiednio a_1, a_2, \dots ($a_i > 0$). Wykaż, że wówczas:

a) $U_n := \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n a_i, n \in \mathbb{N}$,

b) $V_n := \frac{X_1 \cdots X_n}{a_1 \cdots a_n}, n \in \mathbb{N}$

są martyngałami względem naturalnej filtracji generowanej przez zmienne X_1, X_2, \dots (tzn. przez $\{\mathcal{F}_n\}$, gdzie $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$).

Zadanie 3. (15 punktów) Niech W_t będzie standardowym procesem Wienera z naturalną filtracją $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s : 0 \leq s \leq t)$. Sprawdź, czy proces $X_t = \frac{1}{2}(W_{4t+3} - W_3)$ jest:

a) martyngałem względem filtracji $\{\mathcal{F}_{4t+3}\}$,

b) procesem Wienera.

Zadanie 4. (10 punktów) Niech W_t oznacza standardowy proces Wienera. Oblicz wartość oczekiwaną, kowariancję i wariancję dla procesu

$$X_t = (t + 3)W_2 + 3W_t - W_{t+2}.$$