Równania stochastyczne. Kolokwium numer I
4 kwietnia 2011 r. Grupa A

Zadanie 1. (15 punktów) Rozpatrzmy $\Omega = [0,1]$, σ-ciało zbiorów borelowskich i P miarę Lebesgue'a na $[0,1]$. Opisz $\sigma(Y)$ i znajdź $E[X|Y]$, jeśli $X(x) = \cos\frac{\pi}{2}x$, $Y(x) = \sin \pi x$.

Zadanie 2. (10 punktów) Niech $\{S_n\}$ będzie błądzeniem losowym zdefiniowanym jako $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, gdzie $\{X_k\}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $P(X_k = -2) = P(X_k = 1) = \frac{1}{2}$, zaś $\{\mathcal{F}_n\}$ naturalną filtracją (tzn. $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, ..., S_n)$). Wykazać, że

$$Y_n := \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{S_n} \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}$$

jest martyngałem względem $\{\mathcal{F}_n\}$. Ile wynosi $E(Y_n)$?

Zadanie 3. (15 punktów) Niech W_t będzie standardowym procesem Wienera z naturalną filtracją $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s \colon 0 \leqslant s \leqslant t)$. Wykazać, że $\{W_t^3 - 3tW_t\}$ jest martyngałem względem $\{\mathcal{F}_t\}$.

Zadanie 4. (10 punktów) Niech W_t oznacza standardowy proces Wienera. Oblicz wartość oczekiwaną, kowariancję i wariancję dla procesu

$$X_t = tW_1 + 2W_{2t} + W_{t+5}.$$

Równania stochastyczne. Kolokwium numer I
4 kwietnia 2011 r. Grupa B

Zadanie 1. (15 punktów) Rozpatrzmy $\Omega = [0,1]$, σ-ciało zbiorów borelowskich i P miarę Lebesgue'a na $[0,1]$. Opisz $\sigma(Y)$ i znajdź $E[X|Y]$, jeśli $X(x) = e^x$, $Y(x) = \cos^2 \pi x$.

Zadanie 2. (10 punktów) Niech $\{S_n\}$ będzie błądzeniem losowym zdefiniowanym jako $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, gdzie $\{X_k\}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $P(X_k = -1) = P(X_k = 2) = \frac{1}{2}$, zaś $\{\mathcal{F}_n\}$ naturalną filtracją (tzn. $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, ..., S_n)$). Wykazać, że

$$Y_n := \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{S_n} \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}$$

jest martyngałem względem $\{\mathcal{F}_n\}$. Ile wynosi $E(Y_n)$?

Zadanie 3. (15 punktów) Niech W_t będzie standardowym procesem Wienera z naturalną filtracją $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s \colon 0 \leqslant s \leqslant t)$. Wykazać, że $\{W_t^4 - 6tW_t^2 + 3t^2\}$ jest martyngałem względem $\{\mathcal{F}_t\}$.

Zadanie 4. (10 punktów) Niech W_t będzie standardowym procesem Wienera. Oblicz

$$P(2W_4 + 2W_1 > 3W_3).$$

Wskazówka: Znajdź rozkład odpowiedniej zmiennej losowej.