

**Egzamin ze stochastycznych równań różniczkowych**  
**Zadania. 20 VI 2011. Grupa B**

Imię i Nazwisko: .....

Numer indeksu: .....

**Zadanie 1.** (8 punktów) Niech  $W_t$  oznacza standardowy proces Wienera w  $\mathbb{R}$  z naturalną filtracją  $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s: 0 < s < t)$ . Wykaż, że następujące procesy są martyngałami względem filtracji  $\{\mathcal{F}_t\}$ :

- a)  $X_t = \cos(t)W_t + \int_0^t \sin(u)W_u du$  dla  $t > 0$ ,  
b)  $Y_t = e^{-4W_t - 8t}$  dla  $t > 0$ .

**Zadanie 2.** (7 punktów) Niech  $W_t$  oznacza standardowy proces Wienera w  $\mathbb{R}$ . Oblicz wartość oczekiwaną, kowariancję i wariancję dla procesu

$$X_t = (t + 3)W_{t+2} - 2W_t \quad (t > 0).$$

Czy  $X_t$  jest standardowym procesem Wienera? Znajdź rozkład zmiennej losowej  $X_t$  dla każdego ustalonego  $t > 0$ .

**Zadanie 3.** (5 punktów) Niech  $X_t$  i  $Y_t$  będą 1-wymiarowymi procesami Itô. Znajdź wzór ogólny na różniczkę procesu  $e^{X_t Y_t}$ . Ile wynosi ta różniczka w przypadku gdy

$$X_t = t + \int_0^t dW_s \quad \text{i} \quad Y_t = \frac{t^2}{2} + \int_0^t W_s dW_s.$$

**Zadanie 4.** (10 punktów) Rozwiąż układ równań ( $W_t \in \mathbb{R}$ ):

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2t}{t^2+2}X_1 + (t^2 + 2)X_2 + 4t \\ 3X_2 + 3 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 3t^2 + 6 \\ 0 \end{bmatrix} dW_t, \quad X_1(0) = 0, \quad X_2(0) = 0.$$

**Zadanie 5.** (5 punktów) Wykaż, że istnieje dokładnie jedno rozwiązanie  $X_t$  następującego 1-wymiarowego równania stochastycznego

$$dX_t = \sin(X_t) dt + \sqrt{1 + X_t^2} dW_t, \quad X_0 = a.$$

Znajdź generator procesu  $X_t$  będącego tym rozwiązaniem.

*Osoby, którym wystarczy zaliczenie rozwiązują tylko zadania 3, 4 i 5 (one są równoważne II kolokwium). Aby otrzymać liczbę możliwych punktów do otrzymania za kolokwium należy liczby punktów podane w nawiasie pomnożyć przez współczynnik 2,5 (tak aby w sumie było do zdobycia 50 punktów). Osoby zdające egzamin oczywiście rozwiązują wszystkie zadania, a zadania 3,4 i 5 liczą im się jednocześnie jako II kolokwium do zaliczenia ćwiczeń, czyli też do punktów bonusowych za kolokwia na egzaminie.*

*Życzę powodzenia! Sławomir Michalik*