Egzamin ze stochastycznych równań różniczkowych
Zadania. 20 VI 2011. Grupa A

Imię i Nazwisko: .... Numer indeksu: ....

Zadanie 1. (8 punktów) Niech W_t oznacza standardowy proces Wienera w $\mathbb{R}$ z naturalną filtracją $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s \colon 0 < s < t)$. Wykaż, że następujące procesy są martyngałami względem filtracji $\{\mathcal{F}_t\}$:
a) $X_t = e^t W_t - \int_0^t e^u W_u \, du$ dla $t > 0$,
b) $Y_t = e^{2W_t - 2t}$ dla $t > 0$.

Zadanie 2. (7 punktów) Niech W_t oznacza standardowy proces Wienera w $\mathbb{R}$. Oblicz wartość oczekiwaną, kowariancję i wariancję dla procesu

$$X_t = 3W_{t+2} - tW_t \qquad (t > 0).$$

Czy X_t jest standardowym procesem Wienera? Znajdź rozkład zmiennej losowej X_t dla każdego ustalonego $t > 0$.

Zadanie 3. (5 punktów) Niech X_t i Y_t będą 1-wymiarowymi procesami Itô. Znajdź wzór ogólny na różniczkę procesu $e^{X_t + Y_t}$. Ile wynosi ta różniczka w przypadku gdy

$$X_t = t^2 + \int_0^t dW_s \quad \text{i} \quad Y_t = t + \int_0^t W_s \, dW_s.$$

Zadanie 4. (10 punktów) Rozwiąż układ równań ($W_t \in \mathbb{R}$):

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2X_1 - 4 \\ (t^2+1)X_1 + \frac{2t}{t^2+1}X_2 + 3 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ 2t^2 + 2 \end{bmatrix} dW_t, \quad X_1(0) = 0,\ X_2(0) = 0.$$

Zadanie 5. (5 punktów) Wykaż, że istnieje dokładnie jedno rozwiązanie X_t następującego 1-wymiarowego równania stochastycznego

$$dX_t = \ln(1 + X_t^4)\, dt + \operatorname{arctg}(X_t)\, dW_t,\ X_0 = a.$$

Znajdź generator procesu X_t będącego tym rozwiązaniem.

Osoby, którym wystarczy zaliczenie rozwiązują tylko zadania 3, 4 i 5 (one są równoważne II kolokwium). Aby otrzymać liczbę możliwych punktów do otrzymania za kolokwium należy liczby punktów podane w nawiasie pomnożyć przez współczynnik 2,5 (tak aby w sumie było do zdobycia 50 punktów). Osoby zdające egzamin oczywiście rozwiązują wszystkie zadania, a zadania 3,4 i 5 liczą im się jednocześnie jako II kolokwium do zaliczenia ćwiczeń, czyli też do punktów bonusowych za kolokwia na egzaminie.

Życzę powodzenia! Sławomir Michalik