Ćwiczenia z równań różniczkowych dla III roku matematyki
(2009/2010)
Zadania przygotowawcze do II kolokwium — całość

I. Stosując metodę redukcji rzędu równania znajdź rozwiązania ogólne:

1. $\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 0$ jeśli $x_1(t) = e^{-2t}$,
2. $t^2\ddot{x} - 2x = 0$ jeśli $x_1(t) = t^2$,
3. $t\ddot{x} - \dot{x} + 4t^3 x = 0$ jeśli $x_1(t) = \sin(t^2)$.

II. Znajdź rozwiązanie ogólne układu mając podany fundamentalny układ rozwiązań układu jednorodnego:

1. $\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 - 2x_2 + 3 \\ \dot{x_2} = x_1 - x_2 + 1 \end{cases}$ $\quad \varphi_1(t) = (2\cos t, \cos t + \sin t)$, $\varphi_2(t) = (2\sin t, \sin t - \cos t)$

2. $\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 + x_2 - \cos t \\ \dot{x_2} = -2x_1 - x_2 + \cos t + \sin t \end{cases}$ $\quad \varphi_1(t) = (\cos t, -\cos t - \sin t)$, $\varphi_2(t) = (\sin t, \cos t - \sin t)$

III. Znajdź rozwiązanie ogólne układu jednorodnego oraz rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego (o ile został podany warunek początkowy). Napisz macierz Wrońskiego oraz wronskian:

1. $\begin{cases} \dot{x_1} = 3x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x_2} = -x_1 + 5x_2 - x_3 \\ \dot{x_3} = x_1 - x_2 + 3x_3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x_1} = -x_1 + 8x_2 \\ \dot{x_2} = x_1 + x_2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 + x_2 \\ \dot{x_2} = -2x_1 + 4x_2 \end{cases}$ $\quad x_1(0) = 0,\ x_2(0) = -1$

4. $\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 - 5x_2 \\ \dot{x_2} = 2x_1 - x_2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x_1} = 4x_1 - 5x_2 \\ \dot{x_2} = x_1 \end{cases}$ $\quad x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 1$

6. $\begin{cases} \dot{x_1} = 8x_2 \\ \dot{x_2} = -2x_3 \\ \dot{x_3} = 2x_1 + 8x_2 - 2x_3 \end{cases}$ $\quad x_1(0) = -4,\ x_2(0) = 0,\ x_3(0) = 1$

7. $\begin{cases} \dot{x_1} = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x_2} = -x_1 + 4x_2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x_1} = 3x_1 - x_2 \\ \dot{x_2} = 4x_1 - x_2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x_1} = -x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \dot{x_2} = 4x_1 + x_2 \\ \dot{x_3} = 2x_1 + x_2 - x_3 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x_1} + 2x_1 + 4x_2 = 1 + 4t \\ \dot{x_2} + x_1 - x_2 = \frac{3}{2}t^2 \end{cases}$

IV. Znajdź rozwiązania równań liniowych o stałych współczynnikach:

1. $x'' - 6x' + 8x = 0$
2. $x''' - 2x'' - x' + 2x = 0$
3. $x^{(5)} - 10x''' + 9x' = 0$
4. $x'' + 2x' + 2x = 0$
5. $x^{(5)} - 4x^{(4)} + 5x''' = 0$
6. $x^{(4)} + 10x'' + 9x = 0$
7. $x''' - 6x'' + 12x' - 8x = 0$
8. $x^{(5)} + 8x''' + 16x' = 0$
9. $x'' - 4x' = -12t^2 + 6t - 4$
10. $x'' + x = 4e^t$

11. $x''' + 6x'' + 12x' + 8x = 3e^{-2t}$
12. $x'' - x' = t^{-3}(2-t)e^t$
13. $x^{(5)} + 4x^{(3)} = e^t + 3\sin 2t + 1$
14. $x^{(5)} - x^{(4)} = te^t - 1$

V. Znajdź rozwiązania podanych równań Eulera:

1. $t^2x'' + tx' - 9x = 0;$
2. $t^2x'' - 9tx' + 25x = 0;$
3. $t^3x''' - t^2x'' - 2tx' + 6x = 0;$
4. $t^3x''' - 3t^2x'' - 12tx' + 60x = 0;$
5. $(t+1)^2x'' + (t+1)x' - 9x = 0;$
6. $(t-2)^2x'' + (t-2)x' + 8x = 0;$
7. $t^2x'' - 2tx' + 2x = t^2 - 2t + 2;$
8. $t^2x'' - 2x = \sin\ln t.$

VI. Zbadaj stabilność (w sensie Lapunowa i asymptotyczną) rozwiązania zerowego układu równań:

1. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 3x_2^3 \end{cases};$

2. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2 + x_1^2x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1^3x_2 \end{cases};$

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_1^3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_2^3 \end{cases};$

4. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_2 - x_1(x_1 - x_2)^2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - \frac{3}{2}x_2(x_1 - x_2)^2 \end{cases}.$

VII. Znajdź rozwiązania równań metodą rozwijania w szereg potęgowy wokół $t_0 = 0$. Na jakim zbiorze to rozwiązanie jest określone?

1. równanie Hermite'a $\ddot{x} - 2t\dot{x} + 2px = 0$, gdzie $p \in \mathbb{R}$ — stała;
2. $(1-4t^2)\ddot{x} + 6t\dot{x} - 4x = 0;$
3. $\ddot{x} + t\dot{x} + 3x = t^2.$

VIII. Znajdź układ fundamentalny rozwiązań poniższego równania wiedząc, że równanie to posiada rozwiązanie w postaci wielomianu:

1. $(t + \frac{1}{2})\ddot{x} + (2t-1)\dot{x} - 4x = 0.$