Ćwiczenia z równań różniczkowych zwyczajnych dla III roku matematyki (2009/2010)
Zadania przygotowawcze do I kolokwium

I. Znajdź rozwiązania ogólne danego równania oraz rozwiązanie zagadnienia początkowego (o ile zostało podane (t_0, x_0)):
1. $\dot{x} = \frac{2t}{1-t^2}x^2$,
2. $\dot{x} = x^2 \cos t$,
3. $\dot{x} = \frac{x}{t} + \frac{t}{x}$,
4. $\dot{x} = 1 + 2\frac{x}{t}$, $(t_0, x_0) = (1, 0)$,
5. $\dot{x} = (t + x)^2$,
6. $\dot{x} = \sin^2(t - x)$,
7. $\dot{x} = 2x + \sin t$,
8. $\dot{x} = 2\frac{x}{t} + 2t^3$, $(t_0, x_0) = (1, 0)$,
9. $\dot{x} = x + t$, $(t_0, x_0) = (0, 0)$,
10. $\dot{x} = -\frac{x}{t} + 2t^2x^2$, $(t_0, x_0) = (1, -\frac{1}{2})$,
11. $\dot{x} = \frac{-t-x}{t+x-1}$,
12. $\dot{x} = -\frac{1+x^2}{tx}$,
13. $\dot{x} = \frac{x+\sqrt{tx}}{t}$,
14. $\dot{x} = \sin(t - x)$,
15. $\dot{x} - x \operatorname{tg} t = x^4 \cos t$,
16. $\dot{x} = 1 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x - t}$, $(t_0, x_0) = (0, 0)$,
17. $\dot{x} = x \operatorname{tg} t + \frac{2t}{\cos t}$,
18. $\dot{x} = \frac{1-t}{x}$, $(t_0, x_0) = (0, -1)$,
19. $\dot{x} = \frac{2x+4t}{2t+1}$, $(t_0, x_0) = (0, 3)$,
20. $\dot{x} - 4\frac{x}{t} = 2t\sqrt{x}$,
21. $\dot{x} = -2x + e^t x^2$,
22. $(\sin(tx) + tx\cos(tx))\, dt + t^2 \cos(tx)\, dx = 0$,
23. $(3t^2 + 6tx^2)\, dt + (6t^2x + 4x^3)\, dx = 0$,
24. $(\frac{t}{\sqrt{t^2+x^2}} + \frac{1}{t} + \frac{1}{x})\, tx + (\frac{x}{\sqrt{t^2+x^2}} + \frac{1}{x} - \frac{t}{x^2})\, dx = 0$,
25. $(t + x^2)\, dt - 2tx\, dx = 0$,
26. $2tx \ln x\, dt + (t^2 + x^2\sqrt{x^2 + 1})\, dx = 0$.

II. Wykaż, że x_1 jest rozwiązaniem szczególnym danego równania Riccatiego. Znaleźć rozwiązanie ogólne tego równania:
1. $\dot{x}e^{-t} + x^2 - 2xe^t = 1 - e^{2t}, \quad x_1 = e^t$;
2. $t\dot{x} - x^2 + (2t + 1)x = t^2 + 2t, \quad x_1 = t$;
3. $t^2\dot{x} = t^2x^2 + tx + 1, \quad x_1 = -1/t$.

III. Znajdź rozwiązania ogólne danego równania oraz rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego (o ile został podany warunek początkowy):
1. $\dddot{x} = \frac{\ln t}{t^2}$; $x(1) = 0$, $\dot{x}(1) = 1$, $\ddot{x}(1) = 2$
2. $2\ddot{x} = \frac{\dot{x}}{t} + \frac{t^2}{\dot{x}}$; $x(1) = \frac{\sqrt{2}}{5}$, $\dot{x}(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\dddot{x} = (\ddot{x})^2$
4. $\dddot{x} = \sqrt{1 + (\ddot{x})^2}$
5. $\ddot{x} = 2x\dot{x}$; $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 1$
6. $\ddot{x} = 2x\dot{x}$; $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$
7. $\ddot{x} = 2x\dot{x}$; $x(0) = C$, $\dot{x}(0) = 0$
8. $\ddot{x} + \dot{x}^2 = 2e^{-x}$
9. $x\ddot{x} = \dot{x} + (\dot{x})^2$
10. $2\ddot{x} = 3\dot{x}^2$; $x(-2) = 1$, $\dot{x}(-2) = -1$.

IV. Wykaż, że następujace równania spełniają założenia twierdzenia Picarda-Lindelöfa na zbiorze D:

1. $\dot{x} = 2tx + x^2, \quad D$ jest całą płaszczyzną;
2. $\dot{x} = t + \sqrt{t+2x}, \quad D = \{(t,x):\ t + 2x > 0\}$;
3. $\dot{x} = \cos\sqrt{|tx|}, \quad D$ jest całą płaszczyzną.

V. Korzystając z twierdzenia Picarda–Lindelöfa znajdź trzy pierwsze przybliżenia rozwiązania równania:

1. $\dot{x} = t^2 - x^2, \quad x(-1) = 0,$
2. $\dot{x} = t + x^2, \quad x(0) = 0,$
3. $\dot{x} = t + x, \quad x(0) = 1.$

Podaj oszacowanie błędu pomiędzy trzecim przybliżeniem a rozwiązaniem.

VI. Korzystając z twierdzenia Picarda-Lindelöfa znajdź rozwiązanie równania:

1. $\dot{x} = 3x, \quad x(0) = 1$
2. $\dot{x} = x - t, \quad x(0) = 1.$
3. $\dot{x} = x - t, \quad x(0) = 2.$

VII. Wykazać, że rozwiązanie zagadnienia początkowego przedłuża się na D, jeśli:

1. $\dot{x} = \operatorname{arctg}(t + x^2), \quad (t_0, x_0), \qquad D = (-\infty, +\infty);$
2. $\dot{x} = \frac{tx^3}{1+x^2} - e^t, \quad (t_0, x_0), \qquad D = (-\infty, +\infty);$
3. $y' = x^3 + y^3, \quad (x_0, y_0), \quad D = (-\infty, x_0].$

VIII. Wykaż, że rozwiązanie zagadnienia początkowego przedłuża się na przedział $[t_0, \infty)$. Znajdź dolne i górne oszacowanie tego rozwiązania:

1. $\dot{x} = 3 + \cos(te^{-x}) + \sin t^2 - x^3, \quad x(t_0) = 0;$
2. $\dot{x} = 2 - \operatorname{arctg}((x - t)\cos t) - x^5, \quad x(t_0) = 0.$

IX. Znaleźć pochodne względem parametru:

1. $\dot{x} = \mu x + t - \mu, \quad x(0) = 1, \quad \left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} = ?.$