**Ćwiczenia z Równań Różniczkowych**
**Zadania przygotowawcze do II kolokwium — część I**

I. Znajdź rozwiązania ogólne danego równania oraz rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego (o ile został podany warunek początkowy):

1. $\dddot{x} = \frac{\ln t}{t^2}$; $x(1) = 0$, $\dot{x}(1) = 1$, $\ddot{x}(1) = 2$
2. $2\ddot{x} = \frac{\dot{x}}{t} + \frac{t^2}{\dot{x}}$; $x(1) = \frac{\sqrt{2}}{5}$, $\dot{x}(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\dddot{x} = (\ddot{x})^2$
4. $\dddot{x} = \sqrt{1 + (\ddot{x})^2}$
5. $\ddot{x} = 2x\dot{x}$; $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 1$
6. $\ddot{x} = 2x\dot{x}$; $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$
7. $\ddot{x} = 2x\dot{x}$; $x(0) = C$, $\dot{x}(0) = 0$
8. $\ddot{x} + \dot{x}^2 = 2e^{-x}$
9. $x\ddot{x} = \dot{x} + (\dot{x})^2$
10. $2\ddot{x} = 3\dot{x}^2$; $x(-2) = 1$, $\dot{x}(-2) = -1$

II. Stosując metodę redukcji rzędu równania znajdź rozwiązania ogólne:

1. $\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 0$ jeśli $x_1(t) = e^{-2t}$,
2. $t^2\ddot{x} - 2x = 0$ jeśli $x_1(t) = t^2$,
3. $t\ddot{x} - \dot{x} + 4t^3x = 0$ jeśli $x_1(t) = \sin(t^2)$.

III. Korzystając ze wzoru Liouville'a, dla podanych równań liniowych jednorodnych wyznaczyć brakujące w ich układach fundamentalnych funkcje:

1. $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 0$, $x_1(t) = e^t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$;
2. $\ddot{x} + x = 0$, $x_1(t) = \sin t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$.

IV. Znajdź układ liniowy jednorodny o rozwiązaniach:

1. $\varphi_1(t) = (1, t)$, $\varphi_2(t) = (t, 1)$;
2. $\varphi_1(t) = (e^{-t}, 2e^{-t})$, $\varphi_2(t) = (e^{3t}, -2e^{3t})$.

V. Znajdź rozwiązanie ogólne układu mając podany fundamentalny układ rozwiązań układu jednorodnego:

1. $\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 - 2x_2 + 3 \\ \dot{x_2} = x_1 - x_2 + 1 \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} \varphi_1(t) = (2\cos t, \cos t + \sin t) \\ \varphi_2(t) = (2\sin t, \sin t - \cos t) \end{matrix}$
2. $\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 + x_2 - \cos t \\ \dot{x_2} = -2x_1 - x_2 + \cos t + \sin t \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} \varphi_1(t) = (\cos t, -\cos t - \sin t) \\ \varphi_2(t) = (\sin t, \cos t - \sin t) \end{matrix}$

VI. Znajdź rozwiązanie ogólne układu jednorodnego oraz rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego (o ile został podany warunek początkowy). Napisz macierz Wrońskiego oraz wronskian:

1. $\begin{cases} \dot{x_1} = 3x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x_2} = -x_1 + 5x_2 - x_3 \\ \dot{x_3} = x_1 - x_2 + 3x_3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} \dot{x_1} = -x_1 + 8x_2 \\ \dot{x_2} = x_1 + x_2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 + x_2 \\ \dot{x_2} = -2x_1 + 4x_2 \end{cases}$ $\quad x_1(0) = 0$, $x_2(0) = -1$
4. $\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 - 5x_2 \\ \dot{x_2} = 2x_1 - x_2 \end{cases}$
5. $\begin{cases} \dot{x_1} = 4x_1 - 5x_2 \\ \dot{x_2} = x_1 \end{cases}$ $\quad x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$
6. $\begin{cases} \dot{x_1} = 8x_2 \\ \dot{x_2} = -2x_3 \\ \dot{x_3} = 2x_1 + 8x_2 - 2x_3 \end{cases}$ $\quad x_1(0) = -4$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 1$

7. $\begin{cases} \dot{x_1} = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x_2} = -x_1 + 4x_2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x_1} = 3x_1 - x_2 \\ \dot{x_2} = 4x_1 - x_2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x_1} = -x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \dot{x_2} = 4x_1 + x_2 \\ \dot{x_3} = 2x_1 + x_2 - x_3 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x_1} + 2x_1 + 4x_2 = 1 + 4t \\ \dot{x_2} + x_1 - x_2 = \frac{3}{2}t^2 \end{cases}$

VII. Znajdź rozwiązania równań liniowych o stałych współczynnikach:

1. $x'' - 6x' + 8x = 0$
2. $x''' - 2x'' - x' + 2x = 0$
3. $x^{(5)} - 10x''' + 9x' = 0$
4. $x'' + 2x' + 2x = 0$
5. $x^{(5)} - 4x^{(4)} + 5x''' = 0$
6. $x^{(4)} + 10x'' + 9x = 0$
7. $x''' - 6x'' + 12x' - 8x = 0$
8. $x^{(5)} + 8x''' + 16x' = 0$
9. $x'' - 4x' = -12t^2 + 6t - 4$
10. $x'' + x = 4e^t$
11. $x''' + 6x'' + 12x' + 8x = 3e^{-2t}$
12. $x'' - x' = t^{-3}(2 - t)e^t$
13. $x^{(5)} + 4x^{(3)} = e^t + 3\sin 2t + 1$
14. $x^{(5)} - x^{(4)} = te^t - 1$

VIII. Znajdź rozwiązania podanych równań Eulera:

1. $t^2x'' + tx' - 9x = 0;$
2. $t^2x'' - 9tx' + 25x = 0;$
3. $t^3x''' - t^2x'' - 2tx' + 6x = 0;$
4. $t^3x''' - 3t^2x'' - 12tx' + 60x = 0;$
5. $(t+1)^2x'' + (t+1)x' - 9x = 0;$
6. $(t-2)^2x'' + (t-2)x' + 8x = 0;$
7. $t^2x'' - 2tx' + 2x = t^2 - 2t + 2;$
8. $t^2x'' - 2x = \sin\ln t.$

IX. Znajdź całki pierwsze układu równań w podanym zbiorze $D$:

1. $\begin{cases} x_1' = \frac{x_1}{2x_1 - x_2} \\ x_2' = \frac{x_2}{2x_1 - x_2} \end{cases}$ $D = \{(t, x_1, x_2) : \ x_2 \neq 2x_1, x_2 \neq 0\};$

2. $\begin{cases} x_1' = t \\ x_2' = \frac{x_1}{x_2} \end{cases}$ $D = \{(t, x_1, x_2) : \ x_2 \neq 0\};$

3. $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 \end{cases}$ $D = \{(x_1, x_2) : \ (x_1, x_2) \neq (0, 0)\};$

4. $\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = x_3 \end{cases}$ $D = \{(x_1, x_2, x_3) : \ x_1 \neq 0\}.$

X. Znajdź rozwiązania układów równań korzystając z całek pierwszych:

1. $\begin{cases} x_1' = -\frac{1}{x_2} \\ x_2' = \frac{1}{x_1} \end{cases}$ ; 2. $\begin{cases} x_1' = \frac{e^{-t}}{x_2} \\ x_2' = \frac{e^{-t}}{x_1} \end{cases}$ ; 3. $\begin{cases} x_1' = -\frac{x_1}{x_1 - x_2} \\ x_2' = \frac{x_2}{x_1 - x_2} \end{cases}$ .