**Ćwiczenia z równań różniczkowych zwyczajnych dla II roku matematyki (2009/2010)**
**Zadania przygotowawcze do I kolokwium — część druga**

I. Znajdź rozwiązania ogólne danego równania:

1. $(\sin(tx) + tx\cos(tx))\,dt + t^2\cos(tx)\,dx = 0$
2. $(3t^2 + 6tx^2)\,dt + (6t^2x + 4x^3)\,dx = 0$
3. $(\frac{t}{\sqrt{t^2+x^2}} + \frac{1}{t} + \frac{1}{x})\,tx + (\frac{x}{\sqrt{t^2+x^2}} + \frac{1}{x} - \frac{t}{x^2})\,dx = 0$
4. $(t + x^2)\,dt - 2tx\,dx = 0$
5. $2tx\ln x\,dt + (t^2 + x^2\sqrt{x^2+1})\,dx = 0$

II. Znajdź równania różniczkowe opisujące rodziny krzywych (gdzie $a$ — parametr):

1. $t^2 - x^2 = at$
2. $x = ae^{t/a}$
3. $x = \sin(t + a)$
4. $t^2 + ax^2 = 2x$

III. Znajdź rodziny krzywych ortogonalnych (gdzie $a$ — parametr):

1. $\cos x = ae^{-t}$
2. $t^2 + x^2 = 2ax$
3. $t^2 + \frac{1}{2}x^2 = a^2$
4. $t^k + x^k = a^k$, gdzie $k$ — ustalona stała

IV. Wykaż, że następujace równania sa regularne na zbiorze $D$:

1. $\dot{x} = 2tx + x^2$, $\quad D$ jest całą płaszczyzną;
2. $\dot{x} = t + \sqrt{t + 2x}$, $\quad D = \{(t,x) : \ t + 2x > 0\}$;
3. $\dot{x} = \cos\sqrt{|tx|}$, $\quad D$ jest całą płaszczyzną.

V. Wykaż, że $x_1$ jest rozwiązaniem szczególnym danego równania Riccatiego. Znaleźć rozwiązanie ogólne tego równania:

1. $\dot{x}e^{-t} + x^2 - 2xe^t = 1 - e^{2t}$, $\quad x_1 = e^t$;
2. $t\dot{x} - x^2 + (2t + 1)x = t^2 + 2t$, $\quad x_1 = t$;
3. $t^2\dot{x} = t^2x^2 + tx + 1$, $\quad x_1 = -1/t$.

VI. Korzystając z twierdzenia Picarda–Lindelöfa znajdź trzy pierwsze przybliżenia rozwiązania równania:

1. $\dot{x} = t^2 - x^2$, $\quad x(-1) = 0$,
2. $\dot{x} = t + x^2$, $\quad x(0) = 0$,
3. $\dot{x} = t + x$, $\quad x(0) = 1$.

Podaj oszacowanie błędu pomiędzy trzecim przybliżeniem a rozwiązaniem.

VII. Korzystając z twierdzenia Picarda-Lindelöfa znajdź rozwiązanie równania:

1. $\dot{x} = 3x$, $\quad x(0) = 1$
2. $\dot{x} = x - t$, $\quad x(0) = 1$.
3. $\dot{x} = x - t$, $\quad x(0) = 2$.

VIII. Wykazać, że rozwiązanie zagadnienia początkowego przedłuża się na $D$, jeśli:

1. $\dot{x} = \operatorname{arctg}(t + x^2)$, $\quad (t_0, x_0)$, $\quad D = (-\infty, +\infty)$;
2. $\dot{x} = \frac{tx^3}{1+x^2} - e^t$, $\quad (t_0, x_0)$, $\quad D = (-\infty, +\infty)$;
3. $y' = x^3 + y^3$, $\quad (x_0, y_0)$, $\quad D = (-\infty, x_0]$.

IX. Wykaż, że rozwiązanie zagadnienia początkowego przedłuża się na przedział $[t_0, \infty)$. Znajdź dolne i górne oszacowanie tego rozwiązania:

1. $\dot{x} = 3 + \cos(te^{-x}) + \sin t^2 - x^3$, $\quad x(t_0) = 0$;
2. $\dot{x} = 2 - \operatorname{arctg}((x - t)\cos t) - x^5$, $\quad x(t_0) = 0$.