8 VI 2010 r. Egzamin z równań różniczkowych zwyczajnych dla II roku matematyki. Zestaw A

Imię i Nazwisko: .... Numer indeksu: ....

Uwaga: Z podanych 6 zadań należy wybrać i zrobić 5. Proszę zaznaczyć (np podkreślając) wybrane zadania.

Zadanie 1. Korzystając z twierdzenia Picarda-Lindelöfa zbadaj dla jakich punktów $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ zagadnienie początkowe

$$\dot{x} = 2x - 2t^3 - 3, \qquad x(t_0) = x_0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie w pewnym otoczeniu (t_0, x_0)?

Korzystając z twierdzenia Picarda-Lindelöfa znajdź trzy pierwsze przybliżenia (tzn. $x_0(t)$, $x_1(t)$ i $x_2(t)$) rozwiązania powyższego równania z warunkiem początkowym $x(0) = 2$, określonego na zbiorze $D := [-1, 1] \times [1, 3]$. Podaj oszacowanie błędu pomiędzy rozwiązaniem dokładnym $x(t)$, a otrzymanym przybliżeniem $x_2(t)$. Uwaga: Jeśli równanie $\dot{x} = f(t, x)$ z warunkiem początkowym $x(t_0) = x_0$ i określone na $D = \{(t, x) : \ |t - t_0| \leqslant a, \ |x - x_0| \leqslant b\}$ spełnia założenia twierdzenia Picarda-Lindelöfa to dla $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ zachodzi

$$|x(t) - x_n(t)| \leqslant Mh\frac{(Lh)^n}{(n+1)!},$$

gdzie L jest stałą Lipschitza na D ze względu na x, $M = \max\limits_{(t,x)\in D} |f(t, x)|$ oraz $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$.

Zadanie 2. Wykaż, że rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$\dot{x} = 3 + \sin^2(te^{-x}) - \cos^2(t^2) - x^3, \qquad x(t_0) = 1$$

przedłuża się na przedział $[t_0, \infty)$. Znajdź dolne i górne oszacowanie tego rozwiązania.

Zadanie 3. Zbadaj czy punkt krytyczny $(0, 0)$ dla układu równań

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= -x_1^3 + 2x_1^2 x_2 - 3x_2^4 \\ \dot{x_2} &= -x_2^3 - 2x_1^5 + 3x_1^3 x_2^3 \end{cases}$$

jest stabilny w sensie Lapunowa i asymptotycznie stabilny.
(Wskazówka: poszukaj funkcji Lapunowa postaci $V(x_1, x_2) = ax_1^4 + bx_2^2$.)

Zadanie 4. Znajdź rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$\ddot{x} - 6\dot{x} + 9x = 16e^{-t} + 9t - 6, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1.$$

Zadanie 5. Znajdź rozwiązanie ogólne układu równań

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - x_2 - 1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - 3 \end{cases}.$$

Dla układu jednorodnego podaj fundamentalny układ rozwiązań, jego macierz Wrońskiego i wrońskian.

Zadanie 6. Znajdź rozwiązanie ogólne i całki pierwsze (zależne od t, x_1, x_2) układu równań:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{x_2} \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{x_1}. \end{cases}$$

Życzę powodzenia! Sławomir Michalik