Równania Różniczkowe Cząstkowe
Zadania przygotowawcze do kolokwium nr 2.

Zadanie 1. Znajdź rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego dla równania przewodnictwa cieplnego:

a) $u_t = u_{xx} - \sqrt{t}$, $u(x,0) = 1$;
b) $2u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = \cos 2x$;
c) $u_t = 3\Delta u$, $u(x,y,0) = e^{-x^2-y^2}$;
d) $u_t = \Delta u + te^t$, $u(x,y,z,0) = \sin(x+y+z)$;
e) $u_t = \Delta u + t\cos(x+y)$, $u(x,y,0) = 0$;
f) $u_t = \Delta u$, $u(x,y,z,0) = e^{-(x+y-z)^2}$;
g) $u_t + u = 3\Delta u + e^{-t}\sin t$, $u(x,y,z,0) = ze^{x+2y}$;
h) $u_t - u = 3\Delta u + e^t\cos t$, $u(x,y,z,0) = e^{2x}\cos y\cos z$.

Zadanie 2. Znajdź rozwiązanie równania na $\mathbb{R}^2_+$:

a) $u_t = u_{xx}$ dla $(x,t) \in \mathbb{R}^2_+$, $u(x,0) = 4x^2 + x$, $u_x(0,t) = 1$;
b) $u_t = u_{xx}$ dla $(x,t) \in \mathbb{R}^2_+$, $u(x,0) = x^3 + 1$, $u(0,t) = 1$;
c) $u_t = u_{xx} + \alpha u + f(x,t)$ dla $(x,t) \in \mathbb{R}^2_+$, $u(x,0) = g(x)$, $u_x(0,t) = 0$;
d) $u_t = u_{xx} + 5u + 1$ dla $(x,t) \in \mathbb{R}^2_+$, $u(x,0) = \cos x$, $u_x(0,t) = t$;
e) $u_t = u_{xx} - 3u + t$ dla $(x,t) \in \mathbb{R}^2_+$, $u(x,0) = -2x^4 + x^2 + 1$, $u_x(0,t) = 0$.

Zadanie 3. Znajdź metodą rozdzielenia zmiennych rozwiązanie zagadnienia mieszanego dla równania przewodnictwa cieplnego:

a) $u_t = u_{xx}$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $u(x,0) = \sin^5 x$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$;
b) $u_t = u_{xx}$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $u(x,0) = x^3 - \pi^2 x$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$;
c) $u_t = u_{xx}$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $u(x,0) = 2x^3 - 3\pi x^2 + \pi^3$, $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$;
d) $u_t = 4u_{xx}$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $u(x,0) = x(\pi - x)$, $u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$;
e) $u_t = a^2 u_{xx} - bu$ dla $(x,t) \in (0,l) \times \mathbb{R}_+$, $u(x,0) = \sin\frac{\pi x}{2l}$, $u(0,t) = u_x(l,t) = 0$;
f) $u_t = u_{xx} - 2u_x + te^x\sin 3x$ dla $(x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R}_+$, $u(x,0) = 5e^x\sin x - 3e^x\sin 2x$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$;
g) $u_t = c^2 u_{xx} + t\sin x$ dla $(x,t) \in (0,l) \times \mathbb{R}_+$, $u(x,0) = 5\sin 3x + 1$, $u(0,t) = u_x(l,t) = 0$;
h) $u_t = u_{xx} + u_{yy}$ dla $(x,y,t) \in (0,\pi) \times (0,\pi) \times \mathbb{R}_+$, $u(x,y,0) = \sin 2x\sin 3y - 3\sin 3x\sin 2y + 4$, $u(0,y,t) = u(\pi,y,t) = u(x,0,t) = u(x,\pi,t) = 4$ (uwaga: szukaj rozwiązania w postaci $u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$).

Zadanie 4. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym ograniczonym z brzegiem klasy C^1 oraz dla każdego $T > 0$ niech $u \in C^2_1(U_T)$ będzie rozwiązaniem równania $u_t = \Delta u$ w U_T z warunkami $u(x,0) = g(x) \in C(U)$ dla $x \in U$ i $u(x,t) = h(x) \in C(U)$ dla $(x,t) \in \partial U \times [0,T]$. Wykaż, że wówczas $\lim_{t\to+\infty}\int_U u_t^2(x,t)\,dx = 0$.

Rozwiązanie: Niech $e(t) := \int_U |Du(x,t)|^2\,dx$. Wówczas całkując przez części i korzystając z faktu, że $u_t = h_t = 0$ na ∂U dostaniemy

$$e'(t) = 2\int_U Du \cdot Du_t\,dx = -2\int_U \Delta u u_t\,dx = -2\int_U (u_t)^2\,dx \leqslant 0.$$

Zatem $e(t)$ jest funkcją malejącą i nieujemną. Ponadto ponieważ

$$\Delta(u_t^2) = 2(\Delta u_t)u_t + 2\sum_{i=1}^n u_{x_i t}^2 = \frac{d}{dt}u_t^2 + 2\sum_{i=1}^n u_{x_i t}^2,$$

to

$$e''(t) = -2\int_U \frac{d}{dt}u_t^2\,dx = -2\int_U \Delta(u_t^2)\,dx + 4\int_U \sum_{i=1}^n u_{x_i t}^2\,dx = -2\int_{\partial U} \frac{\partial}{\partial n}(u_t^2)\,dS + 4\int_U \sum_{i=1}^n u_{x_i t}^2\,dx,$$

więc stąd, że $u_t^2 \geqslant 0$ i $u_t^2 = 0$ na brzegu, to $\frac{\partial}{\partial n}(u_t^2) \leqslant 0$ na ∂U. Oznacza to, że $e''(t) \geqslant 0$ i $e(t)$ jest funkcją wypukłą ($e'(t)$ jest funkcją rosnącą).

Funkcja $e'(t)$ jako rosnąca i ograniczona z góry przez 0, posiada granicę $\lim_{t\to+\infty} e'(t) = \alpha \leqslant 0$. Pokażemy, że nie może być $\alpha < 0$. Jeśliby bowiem $\alpha < 0$, to $e(T) = e(0) + \int_0^T e'(t)\,dt \leqslant e(0) + \alpha T < 0$ dla odpowiednio dużych T — sprzeczność, bo $e(t) \geqslant 0$. Zatem $\lim_{t\to+\infty} e'(t) = 0$, czyli $\lim_{t\to+\infty} \int_U u_t^2(x,t)\,dx = 0$.

Zadanie 5 Wykaż, że problem początkowo-brzegowy

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) - 7u(x,t) \quad \text{na zbiorze} \quad (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

$u(x,0) = g(x)$ dla $x \in (0,1)$ oraz $u_x(0,t) = \alpha(t)$, $u_x(1,t) = \beta(t)$ dla $t > 0$ posiada co najwyżej jedno klasyczne rozwiązanie.
Wskazówka: Rozważ funkcję energii w postaci $e(t) = \int_0^1 u^2(x,t)\,dx$.

Rozwiązanie: Przypuśćmy, że $u_1(x,t)$ i $u_2(x,t)$ są dwoma rozwiązaniami powyższego problemu. Niech $u(x,t) := u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Wówczas $u(x,t)$ spełnia równanie (1) z warunkami $u(x,0) = 0$ dla $x \in (0,1)$ oraz $u_x(0,t) = 0$, $u_x(1,t) = 0$ dla $t > 0$. Wystarczy wykazać, że $u(x,t) \equiv 0$. W tym celu rozważmy funkcję energii $e(t) = \int_0^1 u^2(x,t)\,dx$. Zauważmy, że

$$e'(t) = 2\int_0^1 uu_t\,dx = 2\int_0^1 uu_{xx}\,dx - 14\int_0^1 u^2\,dx = -2\int_0^1 u_x^2\,dx - 14e(t) \leqslant 0.$$

Zatem funkcja $e(t)$ jest nierosnąca. Ponieważ w dodatku $e(0) = 0$ i $e(t) \geqslant 0$, to $e(t) \equiv 0$. Oznacza to, że również $u(x,t) \equiv 0$ na $(0,1) \times \mathbb{R}_+$.