Równania Różniczkowe Cząstkowe
Zadania przygotowawcze do kolokwium nr 1. II część.

Zadanie 6. Znajdź funkcję harmoniczną w $\mathbb{R}^2_+ := \{(x,y): \ y > 0\}$ i ciągłą do brzegu $\{(x,y): \ y = 0\}$, ograniczoną w $\mathbb{R}^2_+$ i spełniającą warunek Dirichleta:

a) $u(x,0) = \sin 5x$;
b) $u(x,0) = \frac{\cos x}{1+x^2}$.

Zadanie 7. Znajdź funkcję harmoniczną $u = u(x,y,z)$ spełniającą dane warunki początkowe:

a) $u(x,y,0) = x^3 + y^2$, $u_z(x,y,0) = e^{-x} + x$;
b) $u(x,y,0) = x \sin y$, $u_z(x,y,0) = \cos y + 3$;
c) $u(x,y,0) = e^{3x+4y}$, $u_z(x,y,0) = \sinh y$.

Zadanie 8. Znajdź rozwiązanie zagadnienia Dirichleta na kuli:

a) $\Delta u(x,y) = 0$ na $B(0,R)$, $u(x,y) = xy^2$ na $\partial B(0,R)$;
b) $\Delta u(x,y) = 1$ na $B(0,R)$, $u(x,y) = x^4$ na $\partial B(0,R)$;
c) $\Delta u(x,y) = \sin x$ na $B(0,R)$, $u(x,y) = -\sin x + xy$ na $\partial B(0,R)$.

Zadanie 9. Znajdź rozwiązanie zagadnienia Dirichleta na pierścieniu:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{w} \quad r < \sqrt{x^2+y^2} < R \\ u(x,y) = 1 + x^2 + y^2 & \text{na} \quad \sqrt{x^2+y^2} = r \\ u(x,y) = x^2 - y^2 & \text{na} \quad \sqrt{x^2+y^2} = R \end{cases}$$

Zadanie 10. Znajdź rozwiązanie zagadnienia Dirichleta na prostokącie:

a)

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{w} \quad [0,1] \times [0,1] \\ u(x,0) = x, & u(x,1) = u_x(0,y) = 0, \quad u_x(1,y) = y^2 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{w} \quad [0,a] \times [0,b] \\ u(0,y) = u(a,y) = u(x,0) = 0, & u(x,b) = 1 \end{cases}$$

Zadanie 11. Czy zagadnienie Neumanna na kuli jest dobrze postawione? Jeśli tak, to rozwiąż je:

a)

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{w} \quad B(0,1) \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,y) = x + y & \text{na} \quad \partial B(0,1) \\ u(0,0) = 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{w} \quad B(0,1) \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,y) = x^3 - y^3 & \text{na} \quad \partial B(0,1) \\ u(0,0) = 3 \end{cases}$$