

**Równania Różniczkowe Częstkowe**  
**Zadania przygotowawcze do kolokwium nr 1. I część.**

**Zadanie 1.** Znajdź rozwiązanie spełniające dany warunek początkowy:

- a)  $xu_x - yu_y = 0, u(x, 1) = 3x;$
- b)  $\sqrt{x}u_x + yu_y = 0, u(1, y) = y;$
- c)  $yu_x - u_y = 0, u(x, x) = 1, \text{ gdy } x > 0;$
- d)  $u_x + u_y - u_z = 0, u(0, y, z) = y - z;$
- e)  $zu_x - yu_y = 0, u(1, y, z) = 3z, \text{ gdy } z > 0.$

**Zadanie 2.** Znajdź rozwiązanie równania quasi-liniowego spełniające dany warunek początkowy:

- a)  $xu_x + yu_y = 2u, u(x, 1) = x;$
- b)  $uu_x + u_y = 1, u(x, x) = \frac{1}{2}x;$
- c)  $xu_x + 2yu_y + u_z = 3u, u(x, y, 0) = xy;$
- d)  $x(y^2 + u)u_x - y(x^2 + u)u_y = (x^2 - y^2)u, u(x, -x) = 1;$
- e)  $(x - y)y^2u_x + (y - x)x^2u_y = (x^2 + y^2)u, xu(x, 0) = 1.$

**Zadanie 3.** Znajdź rozwiązanie równania nieliniowego spełniające dany warunek początkowy:

- a)  $u_x^2 + u_y^2 = 4u, u(x, 0) = x^2 + 1, \text{ wskazówka: wyrazić } x, y, u, p \text{ przez } q;$
- b)  $u + xu_x + yu_y - 1 - x^2y^2u_xu_y = 0, u(x, x) = 0;$
- c)  $(1 + u_y^2)u = xu_x, u(x, 0) = \frac{x^2}{2}, \text{ wskazówka: wyrazić } x, y, u, p \text{ przez funkcję } \varphi, \text{ gdzie } q = \text{tg } \varphi.$

**Zadanie 4.** Wyznacz funkcję  $v = v(x, y)$  harmonicznie sprzężoną do  $u = u(x, y)$  i odpowiadającą im funkcję holomorficzną, jeśli:

- a)  $u = \sin x \cosh y + 2 \cos x \sinh y,$
- b)  $u = x^2 - y^2 + 4xy,$
- c)  $u = e^x(x \cos y - y \sin y).$

**Zadanie 5.** Wyznacz funkcję harmoniczną  $u = u(x, y, z)$ , jeśli:

- a)  $u_x = xyz,$
- b)  $u_y = 6x^2z - 3y^2z - z^3,$
- c)  $u_y = ze^x \cos y + y.$