13.09.2010

Wydział Matematyczno Przyrodniczy.
Szkoła Nauk Ścisłych UKSW
prof. UKSW dr hab. Krzysztof Chełmiński

Równania różniczkowe cząstkowe — semestr letni 2010

Egzamin poprawkowy — Grupa A

Nazwisko i imię:... Numer indeksu:.........................

Zadanie 1 Znajdź rozwiązanie $u = u(x, y)$ nieliniowego równania różniczkowego cząstkowego pierwszego rzędu

$$u = \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2) + (u_x - x)(u_y - y)$$

spełniające warunek $u(x, 0) = 0$.

Zadanie 2 Niech $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. Znajdź funkcję harmoniczną w U spełniającą warunki brzegowe $u(x, y) = 4 + 2x^2$ dla $x^2 + y^2 = 1$ i $\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = 3$ dla $x^2 + y^2 = 4$, gdzie n jest kierunkiem zewnętrznym do brzegu $x^2 + y^2 = 4$. Czy problem ten posiada jednoznaczne rozwiązanie? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 3 Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej λ istnieje dokładnie jedno klasyczne rozwiązanie $u = u(x, y, t)$ następującego problemu początkowo-brzegowego

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy} + \lambda u \text{ dla } (x, y, t) \in (0, 1) \times (0, 2) \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, y, 0) = \cos 2\pi x \cos 2\pi y + \cos 4\pi y, \\ u_x(0, y, t) = u_x(1, y, t) = u_y(x, 0, t) = u_y(x, 2, t) = 0. \end{cases}$$

Znajdź to rozwiązanie. Dla jakich λ otrzymane rozwiązanie jest ograniczone?
Wskazówka: W metodzie rozdzielenia zmiennych szukaj rozwiązania w postaci $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$.

Zadanie 4 Znajdź wszystkie rozwiązania $u = u(x, y)$ równania

$$2u_{xx} + 7u_{xy} + 3u_{yy} = 0$$

w zbiorze $\mathbb{R}^2$ takie, że $u(2s, 6s) = \alpha(s)$ i $u(2s, s + 5) = \beta(s)$ dla $s \in \mathbb{R}$, gdzie $\alpha(s)$ i $\beta(s)$ są zadanymi funkcjami spełniającymi związek $\alpha(1) = \beta(1) = 5$. Jak regularne muszą być funkcje $\alpha(s)$ i $\beta(s)$ aby znalezione rozwiązanie było klasyczne?

Zadanie 5 Znajdź rozwiązanie $u = u(x, y, z, t)$ zagadnienia Cauchy'ego:

$$\begin{cases} u_t - u = 3\Delta u + e^t \cos t & \text{dla} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ t > 0 \\ u(x, y, z, 0) = e^{3x+y} \sin 2z & \text{dla} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Wskazówka: Przez odpowiednie podstawienie sprowadź do równania przewodnictwa cieplnego.

Zadanie 6 Niech f będzie funkcją gładką określoną na pewnym otwartym podzbiorze $\mathbb{R}$.
(a) Wykazać, że jeśli $u(x, t) = f(t/|x|)$ spełnia n-wymiarowe równanie falowe ($x \in \mathbb{R}^n$), to f spełnia równanie różniczkowe zwyczajne $(s^2 - 1)f''(s) + (3 - n)sf'(s) = 0$.
(b) Znajdź rozwiązania równania falowego w tej postaci dla $n = 1, 2, 3$.

Życzymy powodzenia. Krzysztof Chełmiński i Sławomir Michalik