**Egzamin poprawkowy z równań różniczkowych**
**Zestaw I. 21 lutego 2008 roku**

Imię i Nazwisko: ............................................ Numer indeksu: .....................

Uwaga: Z podanych 6 zadań należy wybrać i zrobić 5. Proszę zaznaczyć (np podkreślając) wybrane zadania.

**Zadanie 1.** Rozwiąż równanie stosując metodę rozwijania w szereg potęgowy

$$(t^2 + 4)\ddot{x} + 6t\dot{x} + 4x = 0.$$

Na jakim zbiorze takie rozwiązanie jest określone?

**Zadanie 2.** Znajdź rozwiązanie ogólne równania

$$(2t - t^2)\ddot{x} + (t^2 - 2)\dot{x} + 2(1 - t)x = 0$$

wiedząc, że jedno z rozwiązań ma postać

$$x_1(t) = e^t.$$

**Zadanie 3.** Znajdź rozwiązanie ogólne równania liniowego niejednorodnego wyższego rzędu

$$x^{(4)} + 4x = 5e^{2t} + 6\sin 2t + \cos 2t.$$

**Zadanie 4.** Znajdź całki pierwsze (względem $t, x_1, x_2$) i rozwiązanie ogólne układu równań

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & 2(x_1^2 + x_2^2)t \\ \dot{x}_2 & = & 4x_1x_2t \end{array} \right. .$$

**Zadanie 5.** Zbadaj dla jakich punktów $(t_0, x_0)$ rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$\dot{x} = \sin t^3 + t^3, \qquad x(t_0) = x_0$$

jest dokładnie jedno. Na jaki zbiór się przedłuża to rozwiązanie? Kiedy jest malejące, kiedy rosnące i w jakich punktach ma maksima i minima?
Uwaga: Nie próbuj rozwiązywać tego równania!

**Zadanie 6.** Znajdź rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$u_{x_1} + u_{x_2} - u_{x_3} = 0, \qquad u(0, x_2, x_3) = x_2 - x_3.$$

Czy tak postawiony warunek początkowy spełnia założenia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności? Jeśli tak, to dla jakich punktów $p \in S$?

**Egzamin poprawkowy z równań różniczkowych**
**Zestaw II. 21 lutego 2008 roku**

Imię i Nazwisko: ............................................ Numer indeksu: .....................

Uwaga: Z podanych 6 zadań należy wybrać i zrobić 5. Proszę zaznaczyć (np podkreślając) wybrane zadania.

**Zadanie 1.** Rozwiąż równanie stosując metodę rozwijania w szereg potęgowy

$$(1+2t^2)\ddot{x} - 2t\dot{x} + 3x = 0.$$

Na jakim zbiorze takie rozwiązanie jest określone?

**Zadanie 2.** Znajdź rozwiązanie ogólne równania

$$(t-1)\ddot{x} - (t+1)\dot{x} + 2x = 0$$

wiedząc, że jedno z rozwiązań ma postać

$$x_1(t) = e^t.$$

**Zadanie 3.** Znajdź rozwiązanie ogólne równania liniowego niejednorodnego wyższego rzędu

$$4\ddot{x} + 4\dot{x} + x = 18e^t + 7e^{-t} - 3.$$

**Zadanie 4.** Znajdź całki pierwsze (względem $t, x_1, x_2$) i rozwiązanie ogólne układu równań

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \frac{-\ln t}{2x_1} \\ \dot{x}_2 &= \frac{\ln t - 2x_1}{2x_1} \end{cases}.$$

**Zadanie 5.** Zbadaj dla jakich punktów $(t_0, x_0)$ rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$\dot{x} = e^{-t^3} - 1, \qquad x(t_0) = x_0$$

jest dokładnie jedno. Na jaki zbiór się przedłuża to rozwiązanie? Kiedy jest malejące, kiedy rosnące i w jakich punktach ma maksima i minima?
Uwaga: Nie próbuj rozwiązywać tego równania!

**Zadanie 6.** Znajdź rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$x_3 u_{x_1} - x_2 u_{x_2} = 0, \qquad u(1, x_2, x_3) = 3x_3 \text{ gdy } x_3 > 0.$$

Czy tak postawiony warunek początkowy spełnia założenia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności? Jeśli tak, to dla jakich punktów $p \in S$?