Egzamin z równań różniczkowych
Zestaw I. 4 lutego 2008 rok

Imię i Nazwisko: .... Numer indeksu: ....

Uwaga: Z podanych 6 zadań należy wybrać i zrobić 5. Proszę zaznaczyć (np podkreślając) wybrane zadania.

Zadanie 1. Korzystając z twierdzenia Picarda-Lindelöfa zbadaj dla jakich punktów $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ zagadnienie początkowe

$$\dot{x} = 2tx + 6t, \qquad x(t_0) = x_0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie w pewnym otoczeniu (t_0, x_0)?

Korzystając z twierdzenia Picarda-Lindelöfa znajdź rozwiązanie powyższego równania z warunkiem początkowym $x(0) = -2$. Podaj oszacowanie błędu pomiędzy rozwiązaniem dokładnym $x(t)$, a otrzymanym przybliżeniem $x_k(t)$ na zbiorze $D := [-1, 1] \times [-3, -1]$.

Uwaga: Jeśli równanie $\dot{x} = f(t, x)$ z warunkiem początkowym $x(t_0) = x_0$ i określone na $D = \{(t, x) : |t - t_0| \leqslant a,\ |x - x_0| \leqslant b\}$ spełnia założenia twierdzenia Picarda-Lindelöfa to dla $|t - t_0| \leqslant \delta$ zachodzi $|x(t) - x_k(t)| \leqslant Me^{L\delta}\delta\frac{(\delta L)^k}{(k+1)!}$, gdzie L jest stałą Lipschitza na D ze względu na x, $M = \max\limits_{(t,x)\in D} |f(t, x)|$ oraz $\delta = \min\{a, \frac{b}{M}\}$.

Zadanie 2. Rozwiąż równanie stosując metodę rozwijania w szereg potęgowy

$$\ddot{x} + 2t\dot{x} + 2x = 0.$$

Na jakim zbiorze takie rozwiązanie jest określone?

Zadanie 3. Wykaż, że rozwiązanie równania

$$\dot{x} = (e^{-x} - x)\ln(10 + t - \sin x) \quad \text{z warunkiem początkowym} \quad x(0) = 0$$

przedłuża się na zbiór $[0, +\infty)$. O ile to możliwe podaj dolne i górne oszacowanie rozwiązania.

Zadanie 4. Znajdź wszystkie krzywe w $\mathbb{R}^2$ posiadające następującą własność: prosta prostopadła do wykresu poszukiwanej krzywej w dowolnym punkcie wykresu przechodzi przez punkt o współrzędnych (1,2).

Zadanie 5. Zbadaj stabilność (w sensie Lapunowa i asymptotyczną) rozwiązania zerowego układu równań:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 - 3x_1 - x_1x_2^4 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_1^2x_2 - 2x_1. \end{cases}$$

Zadanie 6. Znajdź rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$x_1u_{x_1} - x_2u_{x_2} = u^2(x_1 - 3x_2), \qquad x_2u(1, x_2) + 1 = 0.$$

Czy tak postawiony warunek początkowy spełnia założenia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności? Jeśli tak, to dla jakich punktów $p \in S$?

Egzamin z równań różniczkowych
Zestaw II. 4 lutego 2008 rok

Imię i Nazwisko: .... Numer indeksu: ....

Uwaga: Z podanych 6 zadań należy wybrać i zrobić 5. Proszę zaznaczyć (np podkreślając) wybrane zadania.

Zadanie 1. Korzystając z twierdzenia Picarda-Lindelöfa zbadaj dla jakich punktów $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ zagadnienie początkowe

$$\dot{x} = 4tx + 4t, \qquad x(t_0) = x_0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie w pewnym otoczeniu (t_0, x_0)?

Korzystając z twierdzenia Picarda-Lindelöfa znajdź rozwiązanie powyższego równania z warunkiem początkowym $x(0) = 0$. Podaj oszacowanie błędu pomiędzy rozwiązaniem dokładnym $x(t)$, a otrzymanym przybliżeniem $x_k(t)$ na zbiorze $D := [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Uwaga: Jeśli równanie $\dot{x} = f(t, x)$ z warunkiem początkowym $x(t_0) = x_0$ i określone na $D = \{(t, x) : |t - t_0| \leqslant a,\ |x - x_0| \leqslant b\}$ spełnia założenia twierdzenia Picarda-Lindelöfa to dla $|t - t_0| \leqslant \delta$ zachodzi $|x(t) - x_k(t)| \leqslant M e^{L\delta} \delta \frac{(\delta L)^k}{(k+1)!}$, gdzie L jest stałą Lipschitza na D ze względu na x, $M = \max\limits_{(t,x)\in D} |f(t, x)|$ oraz $\delta = \min\{a, \frac{b}{M}\}$.

Zadanie 2. Rozwiąż równanie stosując metodę rozwijania w szereg potęgowy

$$2\ddot{x} - 9t\dot{x} - 18x = 0.$$

Na jakim zbiorze takie rozwiązanie jest określone?

Zadanie 3. Wykaż, że rozwiązanie równania

$$\dot{x} = -(e^x + x)(10 - x\ln(t + 1))^2 \quad \text{z warunkiem początkowym} \quad x(0) = 0$$

przedłuża się na zbiór $[0, +\infty)$. O ile to możliwe podaj dolne i górne oszacowanie rozwiązania.

Zadanie 4. Znajdź wszystkie krzywe w $\mathbb{R}^2$ posiadające następującą własność: prosta prostopadła do wykresu poszukiwanej krzywej w dowolnym punkcie wykresu przechodzi przez punkt o współrzędnych (2,1).

Zadanie 5. Zbadaj stabilność (w sensie Lapunowa i asymptotyczną) rozwiązania zerowego układu równań:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2^3 + x_1 x_2^4 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_1^3 - x_1^4 x_2. \end{cases}$$

Zadanie 6. Znajdź rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} = u - x_1^2 - x_2^2, \qquad u(x_1, -2) = x_1 - x_1^2.$$

Czy tak postawiony warunek początkowy spełnia założenia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności? Jeśli tak, to dla jakich punktów $p \in S$?

Egzamin z równań różniczkowych
Zestaw III. 4 lutego 2008 rok

Imię i Nazwisko: .... Numer indeksu: ....

Uwaga: Z podanych 6 zadań należy wybrać i zrobić 5. Proszę zaznaczyć (np podkreślając) wybrane zadania.

Zadanie 1. Korzystając z twierdzenia Picarda-Lindelöfa zbadaj dla jakich punktów $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ zagadnienie początkowe

$$\dot{x} = 2tx + 6t, \qquad x(t_0) = x_0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie w pewnym otoczeniu (t_0, x_0)?

Korzystając z twierdzenia Picarda-Lindelöfa znajdź rozwiązanie powyższego równania z warunkiem początkowym $x(0) = -2$. Podaj oszacowanie błędu pomiędzy rozwiązaniem dokładnym $x(t)$, a otrzymanym przybliżeniem $x_k(t)$ na zbiorze $D := [-1, 1] \times [-3, -1]$.

Uwaga: Jeśli równanie $\dot{x} = f(t, x)$ z warunkiem początkowym $x(t_0) = x_0$ i określone na $D = \{(t, x) : |t - t_0| \leqslant a,\ |x - x_0| \leqslant b\}$ spełnia założenia twierdzenia Picarda-Lindelöfa to dla $|t - t_0| \leqslant \delta$ zachodzi $|x(t) - x_k(t)| \leqslant Me^{L\delta}\delta\frac{(\delta L)^k}{(k+1)!}$, gdzie L jest stałą Lipschitza na D ze względu na x, $M = \max\limits_{(t,x)\in D} |f(t, x)|$ oraz $\delta = \min\{a, \frac{b}{M}\}$.

Zadanie 2. Rozwiąż równanie stosując metodę rozwijania w szereg potęgowy

$$\ddot{x} - 2t\dot{x} - 2x = 0.$$

Na jakim zbiorze takie rozwiązanie jest określone?

Zadanie 3. Wykaż, że rozwiązanie równania

$$\dot{x} = (e^{-x} - x)\sqrt{20 + t - \cos x} \quad \text{z warunkiem początkowym} \quad x(0) = 0$$

przedłuża się na zbiór $[0, +\infty)$. O ile to możliwe podaj dolne i górne oszacowanie rozwiązania.

Zadanie 4. Znajdź wszystkie krzywe w $\mathbb{R}^2$ posiadające następującą własność: prosta prostopadła do wykresu poszukiwanej krzywej w dowolnym punkcie wykresu przechodzi przez punkt o współrzędnych (1,3).

Zadanie 5. Zbadaj stabilność (w sensie Lapunowa i asymptotyczną) rozwiązania zerowego układu równań:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1x_2^2 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1^3 - 3x_2 - x_1^4x_2 \end{cases}$$

Zadanie 6. Znajdź rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$-x_1u_{x_1} + x_2u_{x_2} = u^2(-3x_1 + x_2), \qquad x_1u(x_1, 1) = -1.$$

Czy tak postawiony warunek początkowy spełnia założenia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności? Jeśli tak, to dla jakich punktów $p \in S$?

Egzamin z równań różniczkowych
Zestaw IV. 4 lutego 2008 rok

Imię i Nazwisko: .... Numer indeksu: ....

Uwaga: Z podanych 6 zadań należy wybrać i zrobić 5. Proszę zaznaczyć (np podkreślając) wybrane zadania.

Zadanie 1. Korzystając z twierdzenia Picarda-Lindelöfa zbadaj dla jakich punktów $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ zagadnienie początkowe

$$\dot{x} = 4tx + 4t, \qquad x(t_0) = x_0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie w pewnym otoczeniu (t_0, x_0)?

Korzystając z twierdzenia Picarda-Lindelöfa znajdź rozwiązanie powyższego równania z warunkiem początkowym $x(0) = 0$. Podaj oszacowanie błędu pomiędzy rozwiązaniem dokładnym $x(t)$, a otrzymanym przybliżeniem $x_k(t)$ na zbiorze $D := [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Uwaga: Jeśli równanie $\dot{x} = f(t, x)$ z warunkiem początkowym $x(t_0) = x_0$ i określone na $D = \{(t, x) : |t - t_0| \leqslant a,\ |x - x_0| \leqslant b\}$ spełnia założenia twierdzenia Picarda-Lindelöfa to dla $|t - t_0| \leqslant \delta$ zachodzi $|x(t) - x_k(t)| \leqslant Me^{L\delta}\delta\frac{(\delta L)^k}{(k+1)!}$, gdzie L jest stałą Lipschitza na D ze względu na x, $M = \max\limits_{(t,x)\in D} |f(t, x)|$ oraz $\delta = \min\{a, \frac{b}{M}\}$.

Zadanie 2. Rozwiąż równanie stosując metodę rozwijania w szereg potęgowy

$$2\ddot{x} + 5t\dot{x} + 10x = 0.$$

Na jakim zbiorze takie rozwiązanie jest określone?

Zadanie 3. Wykaż, że rozwiązanie równania

$$\dot{x} = -(e^x + x)\sin^2(10 - x\ln(t + 1)) \quad \text{z warunkiem początkowym} \quad x(0) = 0$$

przedłuża się na zbiór $[0, +\infty)$. O ile to możliwe podaj dolne i górne oszacowanie rozwiązania.

Zadanie 4. Znajdź wszystkie krzywe w $\mathbb{R}^2$ posiadające następującą własność: prosta prostopadła do wykresu poszukiwanej krzywej w dowolnym punkcie wykresu przechodzi przez punkt o współrzędnych (4,1).

Zadanie 5. Zbadaj stabilność (w sensie Lapunowa i asymptotyczną) rozwiązania zerowego układu równań:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2^3 - x_1x_2^4 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 2x_1^3 + x_1^4x_2. \end{cases}$$

Zadanie 6. Znajdź rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$x_1u_{x_1} + x_2u_{x_2} = u - x_1^2 - x_2^2, \qquad u(-2, x_2) = x_2 - x_2^2.$$

Czy tak postawiony warunek początkowy spełnia założenia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności? Jeśli tak, to dla jakich punktów $p \in S$?