21 IX 2007 r. Egzamin poprawkowy z równań różniczkowych.
Zestaw I

Imię i Nazwisko: .... Numer indeksu: ....

Uwaga: Z podanych 6 zadań należy wybrać i zrobić 5. Proszę zaznaczyć (np podkreślając) wybrane zadania.

Zadanie 1. Znajdź rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$\frac{\ddot{x}}{(\dot{x})^2} = \frac{2x}{1+x^2}, \qquad x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 1.$$

Na jaki maksymalny przedział się te rozwiązanie przedłuża?

Zadanie 2. Znajdź rozwiązanie ogólne równania:

$$(2tx^2 - 3x^3)\,dt + (7 - 3tx^2)\,dx = 0.$$

Wskazówka: poszukaj czynnika całkującego postaci $\mu = \varphi(t)$ lub $\mu = \varphi(x)$.
(Uwaga: μ musi spełniać równanie $P\partial\mu/\partial x - Q\partial\mu/\partial t = \mu(\partial Q/\partial t - \partial P/\partial x)$.)

Zadanie 3. Znajdź rozwiązanie ogólne równania

$$x^{(4)} - 4\ddot{x} = t^2 + e^t.$$

Zadanie 4. Znajdź rozwiązanie ogólne układu równań

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 - x_3 \end{cases}.$$

Podaj fundamentalny układ rozwiązań, jego macierz Wrońskiego i wrońskian.

Zadanie 5. Zbadaj stabilność (w sensie Lapunowa i asymptotyczną) rozwiązania zerowego układu równań:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1x_2 - x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1^4 - x_1^2x_2 - x_1^3. \end{cases}$$

(Wskazówka: poszukaj funkcji Lapunowa postaci $V(x_1, x_2) = ax_1^4 + bx_2^2$.)

Zadanie 6. Znajdź rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$x_1u_{x_1} + x_2u_{x_2} = u - x_1x_2, \qquad u(2, x_2) = x_2^2 + 1.$$

Czy tak postawiony warunek początkowy spełnia założenia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności? Jeśli tak, to dla jakich punktów $p \in S$?