

**Egzamin poprawkowy z równań różniczkowych**  
**Zestaw I. 23 II 2007 rok**

Imię i Nazwisko: .....

Numer indeksu: .....

Uwaga: Z podanych 6 zadań należy wybrać i zrobić 5. Proszę zaznaczyć (np podkreślając) wybrane zadania.

**Zadanie 1.** Wykaż, że rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$\dot{x} = 4t^3 + \sin(tx) - \arctg(x^2 - t) - x^5, \quad x(1) = 1$$

przedłuża się na przedział  $[1, \infty)$ . Znajdź dolne oszacowanie tego rozwiązania.

**Zadanie 2.** Znajdź rozwiązanie ogólne równania i rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$t^3 \dot{x} - t^2 \ddot{x} - 2t\dot{x} + 6x = 0; \quad x(1) = 2, \quad \dot{x}(1) = 3, \quad \ddot{x}(1) = 12.$$

Na jaki zbiór to rozwiązanie się przedłuża?

**Zadanie 3.** Znaleźć krzywe, dla których długość odcinka, jaki styczna poprowadzona w dowolnym punkcie krzywej odcina na osi  $Ox$ , jest równa kwadratowi drugiej współrzędnej punktu styczności  $(t_0, x_0)$ .

**Zadanie 4.** Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{x_2} \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{x_1}. \end{cases}$$

Znajdź dwie niezależne całki pierwsze tego układu (zależne od  $t, x_1, x_2$ ).

**Zadanie 5.** Znajdź rozwiązanie ogólne układu równań

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 + 2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + x_2 + 3. \end{cases}$$

Dla układu jednorodnego podaj fundamentalny układ rozwiązań, jego macierz Wrońskiego i wrońskian.

**Zadanie 6.** Znajdź rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$(x_3 - x_2)^2 u_{x_1} + x_3 u_{x_2} + x_2 u_{x_3} = 0, \quad u(0, x_2, x_3) = 2x_2(x_2 - x_3).$$

Czy tak postawiony warunek początkowy spełnia założenia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności? Jeśli tak, to dla jakich punktów  $p \in S$ ?