Egzamin z równań różniczkowych
Grupa I. 3 luty 2007 rok

Imię i Nazwisko: .... Numer indeksu: ....

Uwaga: Z podanych 6 zadań należy wybrać i zrobić 5. Proszę zaznaczyć (np podkreślając) wybrane zadania.

Zadanie 1. Korzystając z twierdzenia Picarda-Lindelöfa zbadaj dla jakich punktów $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ zagadnienie początkowe

$$\dot{x} = 2tx + 2t, \qquad x(t_0) = x_0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie w pewnym otoczeniu (t_0, x_0)?

Korzystając z twierdzenia Picarda-Lindelöfa znajdź rozwiązanie powyższego równania z warunkiem początkowym $x(0) = 0$. Podaj oszacowanie błędu pomiędzy rozwiązaniem dokładnym $x(t)$, a otrzymanym przybliżeniem $x_k(t)$ na zbiorze $D := [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Uwaga: Jeśli równanie $\dot{x} = f(t, x)$ z warunkiem początkowym $x(t_0) = x_0$ i określone na $D = \{(t, x) : |t - t_0| \leqslant a, \; |x - x_0| \leqslant b\}$ spełnia założenia twierdzenia Picarda-Lindelöfa to dla $|t - t_0| \leqslant \delta$ zachodzi $|x(t) - x_k(t)| \leqslant Me^{L\delta}\delta\frac{(\delta L)^k}{(k+1)!}$, gdzie L jest stałą Lipschitza na D ze względu na x, $M = \max\limits_{(t,x)\in D} |f(t, x)|$ oraz $\delta = \min\{a, \frac{b}{M}\}$.

Zadanie 2. Rozwiąż równanie znajdując czynnik całkujący postaci $\mu = \varphi(t + x^2)$

$$\frac{3x^2 - t}{2}\,dt + (x^3 - 3tx)\,dx = 0.$$

Uwaga: μ musi spełniać równanie $P\partial\mu/\partial x - Q\partial\mu/\partial t = \mu(\partial Q/\partial t - \partial P/\partial x)$.

Zadanie 3. Znajdź rozwiązanie zagadnienia początkowego i podaj na jaki zbiór się ono przedłuża:

$$x\ddot{x}(2 + \ln x) + (\dot{x})^2 = 0, \quad x(1) = 1 \quad \dot{x}(1) = 1/2.$$

Zadanie 4. Znajdź rozwiązanie ogólne równania

$$\dddot{x} - \ddot{x} = 6t + e^{-t}.$$

Podaj układ równań liniowych 1-go rzędu odpowiadający temu równaniu wyższego rzędu.

Zadanie 5. Zbadaj stabilność (w sensie Lapunowa i asymptotyczną) rozwiązania zerowego układu równań:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_2 + 4x_1^2x_2^2 - x_1^5 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_1^3x_2 - 2x_2^3. \end{cases}$$

Zadanie 6. Znajdź rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$(x_1^2 + x_2^2)u_{x_1} + 2x_1x_2u_{x_2} = -u^2, \qquad u(0, x_2) = \frac{x_2^2}{4}.$$

Czy tak postawiony warunek początkowy spełnia założenia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności? Jeśli tak, to dla jakich punktów $p \in S$?