

Wprowadzenie do modelowania matematycznego. Zadania przygotowujące do kolokwium (część II)

Zadanie 5. Znajdź ekstremale dopuszczalne następujących zadań z ruchomymi końcami:

- a) $\int_0^1 \dot{x}^2 dt \rightarrow$ ekstremum, $x(0) = 1$.
- b) $\int_0^T \dot{x}^2 dt \rightarrow$ ekstremum, $x(0) = 0$, $(T-1)x^2(T) + 2 = 0$.
- c) $\int_0^T \dot{x}^3 dt \rightarrow$ ekstremum, $x(0) = 0$, $T + x(T) = 1$.
- d) $\int_0^T (\dot{x}^2 + x) dt \rightarrow$ ekstremum, $x(T) = T$.
- e) $\int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2) dt - x^2(1) \rightarrow$ ekstremum, $x(0) = 1$.

Zadanie 6. Zapisz równanie Hamiltona-Jacobiego dla:

- a) $\int x^p \sqrt{1 + \dot{x}^2} dt$.
- b) $\int e^{\dot{x}} dt$.

Zadanie 7. Znajdź rozwiązanie ogólne równania Eulera rozwiązując równania Hamiltona-Jacobiego (wskażówka: szukaj rozwiązań równania Hamiltona-Jacobiego w postaci $g(t) + f(x)$):

- a) $\frac{1}{2} \int \dot{x}^2 dt$.
- b) $\frac{1}{2} \int (\dot{x}^2 + x^2) dt$.

Zadanie 8. Znajdź ekstremale dopuszczalne następujących zadań izoperymetrycznych:

- a) $\int_0^1 \dot{x}^2 dt \rightarrow$ ekstremum, $\int_0^1 x dt = 3$, $x(0) = 1$, $x(1) = 6$.
- b) $\int_0^\pi x \sin t dt \rightarrow$ ekstremum, $\int_0^\pi \dot{x}^2 dt = \frac{3\pi}{2}$, $x(0) = 0$, $x(\pi) = \pi$.
- c) $\int_1^2 t^2 \dot{x}^2 dt \rightarrow$ ekstremum, $\int_1^2 tx dt = \frac{7}{3}$, $x(1) = 1$, $x(2) = 2$.

Zadanie 9. Znajdź ekstremale dopuszczalne następujących zadań z pochodnymi wyższych rzędów:

- a) $\int_0^1 (\ddot{x}^2 - 24tx) dt \rightarrow$ ekstremum, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, $x(1) = \frac{1}{5}$, $\dot{x}(1) = 1$.
- b) $\int_0^\pi (\ddot{x}^2 - \dot{x}^2) dt \rightarrow$ ekstremum, $x(0) = \dot{x}(0) = \dot{x}(\pi) = 0$, $x(\pi) = 1$.
- c) $\int_1^e (t+1)t\ddot{x}^2 dt \rightarrow$ ekstremum, $x(1) = 0$, $\dot{x}(1) = 1$, $x(e) = e$, $\dot{x}(e) = 2$.
- d) $\int_0^1 \ddot{x}^2 dt \rightarrow$ ekstremum, $x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0$, $x(1) = 1$, $\dot{x}(1) = 4$, $\ddot{x}(1) = 12$.

Zadanie 10. Dla wszystkich przykładów z zadań 3, 4, 8 i 9 sprawdź czy zachodzą:

- a) Słaby warunek Legendre'a.
- b) Silny warunek Legendre'a.
- c) Słaby warunek Jacobiego.
- d) Silny warunek Jacobiego.

W których przypadkach ekstremale są ekstremami słabymi, a w których nie?

Zadanie 11. Dla wszystkich przykładów z zadań 3 i 4 sprawdź czy zachodzą:

- a) Słaby warunek Wierstrassa.
- b) Silny warunek Wierstrassa.

W których przypadkach ekstremale są ekstremami silnymi, a w których nie?