

Zadania z matematyki
22 października 2010

1. Uprość wyrażenia:

$$a) (a^2 - 3)^3 - (a - 2)(a^2 + 4)(a + 2), \quad b) (2a - 3)^3 - 4a(2a + 3)(2a - 3) + (3 - 2a)^2.$$

2. Rozłóż poniższe wyrażenia na czynniki:

$$\begin{aligned} a) 9a^2 - 1, & \quad b) (1 + 2x)^2 - (x^2 + 2)^2, & \quad c) x^2 + y^2 + 2xy - z^2, \\ d) a^3 - b^3 + 2ab(a - b), & \quad e) 0,027a^6 - \frac{8}{125}b^3, & \quad f) 125(p + q)^6 - 1000p^3q^3. \end{aligned}$$

3. Uprość wyrażenie:

$$(3^{2^n} - 2^{2^k}) \cdot (3^{2^n} + 2^{2^k}) \cdot (3^{2^{n+1}} + 2^{2^{k+1}}).$$

4. Oblicz wartość wyrażenia dla podanej wartości x :

$$\begin{aligned} a) 2(x^2 + 5) + (x - 4)^2 - (3 + x)(3 - x) + 6x, & \quad \text{dla } x = -1, \\ b) (3x + 2)^2 + (2x + 1)(1 - 2x), & \quad \text{dla } x = -2, \\ c) (2x + 1)^2 + (2x + 1)(1 - 2x) - (1 - 2x)^2 - 1, & \quad \text{dla } x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

5. Usuń niewymierność z mianownika liczb:

$$\begin{aligned} a) \frac{1}{3 - \sqrt{2}}, & \quad b) \frac{1}{1 + 2\sqrt[3]{5}}, \\ c) \frac{4\sqrt{2}}{1 - 5\sqrt[3]{3}}, & \quad d) \frac{5}{1 + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}}. \end{aligned}$$

6. Oblicz

$$\begin{aligned} a) \log_4 \frac{\sqrt{8}}{2}, & \quad b) \log_{\sqrt{7}} 3 \cdot \log_3 49, \\ c) 10 \cdot 100^{\frac{1}{2} \log_3 - \log_2}, & \quad d) \frac{(\log_6 3)^2 + \log_6 16}{\log_6 3 \cdot \log_6 48 + (\log_6 4)^2}. \end{aligned}$$

7. Oblicz wartość sumy:

$$\begin{aligned} a) \log_2 8 + \log_2 16 + \log_2 32 + \log_2 64 + \log_2 128 + \log_2 256 + \log_2 512 + \log_2 1024, \\ b) \log_{49} 7 + \log_{49} 7^2 + \log_{49} 7^3 + \log_{49} 7^4 + \dots + \log_{49} 7^{20}. \end{aligned}$$

8. Wykaż, że:

$$\begin{aligned} a) \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 \frac{2}{3} + \log_2 \frac{3}{4} + \dots + \log_2 \frac{1023}{1024} = -10, \\ b) 1 + \log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4 = \log_3 12, \\ c) \log_{12} 18 \cdot \log_{24} 54 + 5(\log_{12} 18 - \log_{24} 54) = 1. \end{aligned}$$

9. Oblicz wartość wyrażenia:

$$\begin{aligned} a) 4^{2 + \log_2 7}, & \quad b) \log_{\sqrt{3}} 2 \cdot \log_5 9, & \quad c) \log_6 2 + \log_{36} 9, \\ d) -\log_2(\log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}), & \quad e) \frac{81^{\frac{1}{\log_5 9}} + 3^{\frac{3}{\log_{\sqrt{6}} 3}}}{409} \cdot ((\sqrt{7})^{\frac{2}{\log_{25} 7}} - 125^{\log_{25} 6}). \end{aligned}$$