Analiza zespolona
Zadania przygotowawcze do kolokwium

Zadanie 1. Przedstaw liczby zespolone w postaci algebraicznej $x+iy$:

a) $(1+i)^4$, b) $\frac{(1+i)(2-i)}{(1-i)^2}$, c) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4$.

Zadanie 2. Niech $z = x + iy$. Znajdź:

a) $\operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)$, b) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1+z^2}\right)$.

Zadanie 3. Na płaszczyźnie zespolonej narysuj zbiory określone warunkami:

a) $|z-i| = \operatorname{Re} z$, b) $|2iz+1| \geqslant 2$, c) $0 \leqslant \operatorname{Re}(iz) < 1$.

Zadanie 4. Oblicz podane pierwiastki. Wynik przedstaw w postaci algebraicznej (jak się da), trygonometrycznej i wykładniczej:

a) $\sqrt[6]{-1}$, b) $\sqrt[3]{-1-i}$, c) $\sqrt[4]{-16}$.

Zadanie 5. Rozwiąż równania:

a) $z^3 - 2i = 0$, b) $z^3 - 4z^2 + 6z - 4 = 0$.

Zadanie 6. Zbadaj zbieżność i podaj granicę (o ile istnieje) ciągów:

a) $\lim_{n\to\infty} 1 + (-1)^n i$, b) $\lim_{n\to\infty}(1/2 + i\sqrt{3}/2)^n$, c) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1+2ni}{n+2i}$.

Zadanie 7. Zbadaj zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2+3i}\right)^n$, b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-i}{n+1}$, c) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2} + (-1)^n\frac{i}{3^n}\right)$.

Zadanie 8. Zbadaj zbieżność szeregu potęgowego i zachowanie na brzegu koła zbieżności:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n^2(1+i)^n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(z-1)^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{3n-1}}{\ln n}$.

Zadanie 9. Zbadaj ciągłość funkcji równych 0 dla $z=0$, a dla $z \neq 0$ określonych w następującu sposób:

a) $\frac{\operatorname{Re} z}{1+|z|}$, b) $z^{-1}\operatorname{Re} z$, c) $z^{-2}(\operatorname{Re} z^2)^2$.

Zadanie 10. Przedstaw w postaci wykładniczej liczbę:

a) $-1/2 + i\sqrt{3}/2$, b) $\sqrt{3} - i\sqrt{3}$.

Zadanie 11. Oblicz znajdując część rzeczywistą i urojoną danej liczby:

a) $\cos(1+i)$, b) $\operatorname{tg}(2-i)$, c) $\ln(-i)$, d) $\operatorname{Ln}(-i)$, e) $\ln(1-i)$,
f) $\operatorname{Ln}(1-i)$, g) $\ln(\sqrt{3}+i)$, h) $\operatorname{Ln}(\sqrt{3}+i)$, i) $(1+i)^{2-i}$ j) $\operatorname{Exp}_{1+i}(2-i)$.

Zadanie 12. Rozwiąż podane równanie:

a) $e^{z+i} = -4$, b) $e^z = e^{\operatorname{Re} z}$, c) $\cos z = -2$, d) $\sin z = i$.

Zadanie 13. Wykaż, że:

a) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$,
b) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$.

Zadanie 14. Wykaż, że równania $\operatorname{tg} w = z$ i $\operatorname{ctg} v = z$ mają dla każdej wartości z różnej od $\pm i$ nieskończenie wiele rozwiązań w i v. Wyraź te rozwiązania za pomocą logarytmu.

Zadanie 15. Wykaż, że wszystkie wartości potęgi $\mathrm{Exp}_a(\alpha + i\beta)$, $a \neq 0$, są:

a) rzeczywiste wtedy i tylko wtedy gdy suma $\beta \mathrm{Ln}\, a + \alpha \mathrm{Arg}\, a$ jest wielokrotnością liczby π i gdy $2a$ jest liczbą całkowitą,
b) mają równe moduły, gdy $\beta = 0$.

Zadanie 16. Znajdź obraz zbioru D przy odwzorowaniu $w = f(z)$. Narysuj zbiór D i jego obraz, jeśli:

a) $D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z - 2 + 3i| \leqslant \sqrt{3}\}$, $\quad f(z) = (1 - i)z + 2i$;
b) $D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ \pi/4 \leqslant \arg z \leqslant \pi/2,\ |z| \leqslant 1\}$, $\quad f(z) = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})\overline{z}$;
c) $D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ 0 \leqslant \mathrm{Re}\, z \leqslant 1,\ 0 \leqslant \mathrm{Im}\, z \leqslant 1\}$, $\quad f(z) = e^z$;
d) $D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ 1 < |z| < e,\ -\pi < \arg z < \pi\}$, $\quad f(z) = \ln z$.

Zadanie 17. Znajdź przekształcenie liniowe $w = az + b$ przekształacające trójkąt o wierzchołkach 0, 1, i w trójąt o wierzchołkach 0, 2, $1 + i$.

Zadanie 18. Znajdź homografię odwzorowującą okrąg $|z| = 1$ na oś rzeczywistą $\mathrm{Im}\, z = 0$, tak aby punktom 1, i, -1 okręgu odpowiadały punkty -1, 0, 1 na osi.

Zadanie 19. Wyznacz obraz danego obszaru przy zadanej homografii:

a) górne półkole koła $|z| < 1$, $w = (2z - i)(2 + iz)^{-1}$;
b) $\{z \in \mathbb{C}\colon\ 0 < \arg z < \pi/4\}$, $w = z(z - 1)^{-1}$;
c) $\{z \in \mathbb{C}\colon\ 0 < \mathrm{Re}\, z < 1\}$, $w = (z - 1)(z - 2)^{-1}$.

Zadanie 20. Korzystając z równań Cauchy-Riemanna zbadaj w jakich punktach podane funkcje mają pochodne, a w jakich są holomorficzne. Oblicz pochodne tam, gdzie istnieją:

a) $f(z) = 1/z$, $\qquad$ b) $f(z) = \ln z$, $\qquad$ c) $f(z) = z(\mathrm{Re}\, z)^2$, $\qquad$ d) $f(z) = ze^{|z|^2}$.

Zadanie 21. Znajdź funkcję holomorficzną $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ wiedząc, że:

a) $v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$, $f(2) = 0$;
b) $v(x, y) = e^x \sin y + 2y$, $f(0) = 5$.

Zadanie 22. Napisz równanie parametryczne $z = z(t)$, gdzie $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, podanych krzywych:
a) odcinka łączącego punkty $z_1 = 3 - i\sqrt{2}$ i $z_2 = -5 + 2i$;
b) elipsy o środku $z_0 = 1 - i\sqrt{2}$ i półosiach $a = 5$ i $b = 3$;
c) hiperboli $y = 1/x$;
d) części krzywej $y = x^3$ zawartej między punktami $-1 - i$, $1 + i$.

Zadanie 23. Oblicz podane całki:

a) $\int_0^{\pi/2} (\cos t + 2ti)\, dt$, $\qquad$ b) $\int_0^2 (1 + (1 + i)t^2)\, dt$, $\qquad$ c) $\int_{-1}^1 (1 - e^t i)\, dt$.

Zadanie 24. Oblicz podane całki po zadanych krzywych:

a) $\int_C (3z + 1)\overline{z}\, dz$, $\quad C$ — półokrąg $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = 1,\ \mathrm{Re}\, z \geqslant 0\}$ o początku $-i$ i końcu i;
b) $\int_C (z - \overline{z})\, dz$, $\quad C$ — łuk paraboli $y = x^2$ o początku $1 + i$ i końcu 0;
c) $\int_C \overline{z} \mathrm{Re}\, z^2\, dz$, $\quad C$ — ćwiartka okręgu $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| = 2,\ \mathrm{Re}\, z \geqslant 0,\ \mathrm{Im}\, z \geqslant 0\}$ o początku $2i$ i końcu 2.

Zadanie 25. Oblicz podane całki po wskazanych krzywych C o zadanym początku z_1 i końcu z_2:

a) $\int_C z \sin(iz)\, dz$, $\quad C$ — krzywa gładka o początku $z_1 = 0$ i końcu $z_2 = \pi i/2$;
b) $\int_C ze^{\pi z^2}$, $\quad C$ — krzywa gładka o początku $z_1 = i$ i końcu $z_2 = 2i$.

Zadanie 26. Korzystając ze wzoru całkowego Cauchy'ego oblicz całkę po zadanych konturach:

a) $\int_C \frac{\sin z\, dz}{z+i}$, C — zorientowany dodatnio okrąg $|z+i| = 3$;
b) $\int_C \frac{dz}{z^2+9}$, C — zorientowany dodatnio okrąg $|z-2i| = 2$;
c) $\int_C \frac{dz}{(z^2+9)^2}$, C — zorientowany dodatnio okrąg $|z-2i| = 2$;
d) $\int_C \frac{e^z\, dz}{(z+2)^4}$, C — kontur zawierający w swym wnętrzu punkt -2.

Zadanie 27. Oblicz całkę $\int_C \frac{dz}{(z-1)^3(z+1)^3}$, jeżeli C jest okręgiem skierowanym dodatnio:

a) o promieniu $r < 2$ i środku w punkcie 1;
b) o promieniu $r < 2$ i środku w punkcie -1;
c) o promieniu $r > 2$ i środku w punkcie 1 lub -1,

Zadanie 28. Znajdź rozwinięcie funkcji $f(z)$ w szereg potęgowy w otoczeniu punktu z_0, gdzie:

a) $f(z) = \cos z$, $z_0 = (2n+1)\pi/2$;
b) $f(z) = z \sin z^2$, $z_0 = 0$;
c) $f(z) = \frac{z^2}{z+2}$, $z_0 = 2$.

Zadanie 29. Znajdź wszystkie zera podanych funkcji i podaj ich krotność:

a) $f(z) = (z^3+1)^2 z^4$, b) $f(z) = e^{z^2} - 1$, c) $f(z) = z^2(e^{iz} - 1)$.

Zadanie 30. Znajdź obszar zbieżności i sumę szeregu Laurenta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, gdzie:

a) $a_n = \begin{cases} 2^{-n} & n \geqslant 0 \\ 2^n & n < 0 \end{cases}$, b) $a_n = \begin{cases} 0 & n \geqslant 0 \\ 2^{-n-1} - 1 & n < 0 \end{cases}$.

Zadanie 31. Znajdź rozwinięcie funkcji w szereg Laurenta w danym pierścieniu:

a) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ dla $2 < |z| < +\infty$;
b) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ dla $0 < |z-1| < 1$;
c) $f(z) = (z^3 + 2z) \sin \frac{1}{z}$ dla $0 < |z| < +\infty$.

Zadanie 32. Określ rodzaj punktów osobliwych odosobnionych, różnych od nieskończoności, dla:

a) $f(z) = \frac{1}{(z^2+i)^3}$, b) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$, c) $f(z) = \operatorname{tg}^2 z$, d) $f(z) = e^{1/(z-2i)}$,
e) $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}$.

Zadanie 33. Jaką osobliwość w punkcie $z = \infty$ mają funkcje:
a) $f(z) = \frac{z}{3-z^4}$, b) $f(z) = e^z + z^3 + z - 2$.