Kolokwium z analizy zespolonej. 5 stycznia 2010 r. Zestaw I

Zadanie 1. Rozwiąż równanie $\cos z = -4$.

Zadanie 2. Korzystając z równań Cauchy-Riemanna zbadaj w jakich punktach funkcja $f(z) = \overline{z}|z|^2$ ma pochodną, a w jakich jest holomorficzna. Oblicz pochodne tam, gdzie istnieją.

Zadanie 3. Oblicz całkę $\int_C \overline{z}\mathrm{Im}\,(z^2)\,dz$ po półokręgu $|z| = 3$, $\mathrm{Re}\,z \geqslant 0$ o początku $-3i$ oraz końcu $3i$.

Zadanie 4. Korzystając ze wzoru całkowego Cauchy'ego oblicz całkę $\int_C \frac{\sin 2z}{(z-\pi)^3}\,dz$, gdzie C jest dodatnio zorientowanym okręgiem $|z - \pi| = 1$.

Zadanie 5. Znajdź rozwinięcie funkcji $f(z) = z\sin(2z^2)$ w szereg potęgowy w otoczeniu punktu $z_0 = 0$.

Kolokwium z analizy zespolonej. 5 stycznia 2010 r. Zestaw II

Zadanie 1. Rozwiąż równanie $\sin z = 3$.

Zadanie 2. Korzystając z równań Cauchy-Riemanna zbadaj w jakich punktach funkcja $f(z) = |z|^2 e^{\mathrm{Re}\,z}$ ma pochodną, a w jakich jest holomorficzna. Oblicz pochodne tam, gdzie istnieją.

Zadanie 3. Oblicz całkę $\int_C (3z+1)\overline{z}\,dz$ po półokręgu $|z| = 1$, $\mathrm{Re}\,z \geqslant 0$ o początku $-i$ oraz końcu i.

Zadanie 4. Korzystając ze wzoru całkowego Cauchy'ego oblicz całkę $\int_C \frac{\cos(2iz)}{(z-\pi i)^3}\,dz$, gdzie C jest dodatnio zorientowanym okręgiem $|z - \pi i| = 1$.

Zadanie 5. Znajdź rozwinięcie funkcji $f(z) = 1 - \cos(3z^2)$ w szereg potęgowy w otoczeniu punktu $z_0 = 0$.