Egzamin z analizy zespolonej
29 stycznia 2010 roku. Zestaw I.

Imię i Nazwisko: .... Nr indeksu: ....

Osoba prowadząca ćwiczenia: ....

Zadanie 1.
Znaleźć obraz zbioru

$$D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ \frac{1}{e} \leqslant |z| \leqslant e,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant 0\}$$

przy przekształceniu $f(z) = 2i \ln z + 1$. Narysować zbiór D i jego obraz $f(D)$.

Korzystając z równań Cauchy-Riemanna zbadać, czy funkcja $f(z)$ jest holomorficzna na D.

Zadanie 2.
Dla danej funkcji

$$f(z) = e^{\frac{1}{z-3}} \frac{(z+1)^3 \sin z}{z(z^3+1)^2}$$

znaleźć wszystkie zera wraz z ich krotnościami oraz znaleźć wszystkie punkty osobliwe izolowane (wraz z nieskończonością) i podać rodzaj ich osobliwości.

Zadanie 3.
Rozwinąć w szereg Laurenta funkcję

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 3z - 4}$$

na pierścieniu: a) $1 < |z| < 4$, b) $0 < |z-1| < 5$.

Zadanie 4.
Korzystając z twierdzenia o residuach obliczyć całkę

$$\int_C \left(z e^{\frac{1}{z}} + \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)(z-6i)} \right) dz,$$

gdzie C jest zorientowanym dodatnio konturem $|z| = 2$.

Zadanie 5.
Korzystając z twierdzenia Rouchy'ego znaleźć liczbę pierwiastków równania

$$z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$$

leżących wewnątrz pierścienia $1 < |z| < 2$.

Egzamin z analizy zespolonej
29 stycznia 2010 roku. Zestaw II.

Imię i Nazwisko: .... Nr indeksu: ....

Osoba prowadząca ćwiczenia: ....

Zadanie 1.
Znaleźć obraz zbioru

$$D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ 0 < |z| \leqslant 1,\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{4}\}$$

przy przekształceniu $f(z) = 2 \ln z - 3i$. Narysować zbiór D i jego obraz $f(D)$.

Korzystając z równań Cauchy-Riemanna zbadać, czy funkcja $f(z)$ jest holomorficzna na D.

Zadanie 2.
Dla danej funkcji

$$f(z) = e^{\frac{1}{2-z}} \frac{(\cos z - 1)(z^4 - 1)}{(z-1)^3(z^2 + 2z + 2)^2}$$

znaleźć wszystkie zera wraz z ich krotnościami oraz znaleźć wszystkie punkty osobliwe izolowane (wraz z nieskończonością) i podać rodzaj ich osobliwości.

Zadanie 3.
Rozwinąć w szereg Laurenta funkcję

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 6}$$

na pierścienu: a) $2 < |z| < 3$, b) $0 < |z + 2| < 5$.

Zadanie 4.
Korzystając z twierdzenia o residuach obliczyć całkę

$$\int_C \left(z^2 \sin \frac{1}{z} + \frac{1}{(z^2 + 4)^2(z + 1)} \right) dz,$$

gdzie C jest zorientowanym dodatnio konturem $|z + 1| = 2$.

Zadanie 5.
Korzystając z twierdzenia Rouchy'ego znaleźć liczbę pierwiastków równania

$$z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0$$

leżących wewnątrz pierścienia $1 < |z| < 2$.