Analiza matematyczna dla IV roku
Zadania przygotowawcze do egzaminu

(Zadania z * na ocenę bardzo dobrą)

Zadanie 1. Wyznacz funkcję $v = v(x, y)$ harmonicznie sprzężoną do $u = u(x, y)$ i odpowiadającą im funkcję holomorficzną, jeśli:

a) $u = \sin x \cosh y + 2 \cos x \sinh y$,
b) $u = x^2 - y^2 + 4xy$,
c) $u = e^x(x \cos y - y \sin y)$,
d) $u = x^2 - y^2 + xy$,
e) $u_x = \cosh x \cos y$,
f) $u_y = x^2 - y^2 + x + y$.

Zadanie 2. Wyznacz funkcję harmoniczną $u = u(x, y, z)$, jeśli:

a) $u_x = xyz$,
b) $u_y = 6x^2z - 3y^2z - z^3$,
c) $u_y = ze^x \cos y + y$,
d) $u_z = xy^2 - xz^2 + 6xz + x$.

Zadanie 3. Znajdź funkcję harmoniczną $u = u(x, y, z)$ spełniającą dane warunki początkowe:

a) $u(x, y, 0) = x^3 + y^2$, $u_z(x, y, 0) = e^{-x} + x$;
b) $u(x, y, 0) = e^{3x+4y}$, $u_z(x, y, 0) = \sinh y$;
c) $u(x, y, 0) = xy + x^2$, $u_z(x, y, 0) = e^x + y$.

Zadanie 4*. Znajdź funkcję harmoniczną w $\mathbb{R}^2_+ := \{(x, y) : \; y > 0\}$ i ciągłą do brzegu $\{(x, y) : \; y = 0\}$, ograniczoną w $\mathbb{R}^2_+$ i spełniającą warunek Dirichleta:

a) $u(x, 0) = \sin 5x$;
b) $u(x, 0) = \frac{\cos x}{1+x^2}$.

Zadanie 5. Znajdź rozwiązanie zagadnienia Dirichleta na kuli:

a) $\Delta u(x, y) = 0$ na $B(0, R)$, $u(x, y) = xy^2$ na $\partial B(0, R)$;
b) $\Delta u(x, y) = 1$ na $B(0, R)$, $u(x, y) = x^4$ na $\partial B(0, R)$;
c) $\Delta u(x, y) = -2$ na $B(0, R)$, $u(x, y) = y^2$ na $\partial B(0, R)$;
d) $\Delta u(x, y) = x$ na $B(0, R)$, $u(x, y) = 0$ na $\partial B(0, R)$;
e) $\Delta u(x, y) = \sin x$ na $B(0, R)$, $u(x, y) = -\sin x + xy$ na $\partial B(0, R)$.

Zadanie 6*. Znajdź rozwiązanie zagadnienia Dirichleta na pierścieniu:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & \text{w} \quad r < \sqrt{x^2 + y^2} < R \\ u(x, y) = 1 + x^2 + y^2 & \text{na} \quad \sqrt{x^2 + y^2} = r \\ u(x, y) = x^2 - y^2 & \text{na} \quad \sqrt{x^2 + y^2} = R \end{cases}$$

Zadanie 7. Znajdź rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego dla równania przewodnictwa cieplnego:

a) $2u_t = u_{xx}$, $u(x, 0) = \cos 2x$;
b) $u_t = u_{xx} + 3t^2$, $u(x, 0) = \sin x$;
c) $u_t = 3\Delta u$, $u(x, y, 0) = e^{-2x-4y}$;
d) $u_t = \Delta u + te^t$, $u(x, y, z, 0) = \sin(x + y + z)$;
e*) $u_t = \Delta u + t \cos(x + y)$, $u(x, y, 0) = 0$;
f*) $u_t = 2\Delta u + t \cos x$, $u(x, y, z, 0) = \cos y \cos z$.

Zadanie 8. Znajdź rozwiązanie zagadnienia mieszanego dla równania przewodnictwa cieplnego:

a) $u_t = u_{xx}$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $t > 0$, $u(x,0) = \sin^5 x$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$;
b) $u_t = 4u_{xx}$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $t > 0$, $u(x,0) = \cos^4 x$, $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$.
c*) $u_t = u_{xx}$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $u(x,0) = 2x^3 - 3\pi x^2 + \pi^3$, $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$;
d*) $u_t = 4u_{xx}$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $u(x,0) = x(\pi - x)$, $u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$.

Zadanie 9. Znajdź rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego dla równania falowego:

a) $u_{tt} = u_{xx}$, $u(x,0) = \sin 3x$, $u_t(x,0) = x^3$;
b) $u_{tt} = u_{xx}$, $u(x,0) = x^5$, $u_t(x,0) = \cos^2 x$;
c) $u_{tt} = 9u_{xx}$, $u(x,0) = x^2 - x$, $u_t(x,0) = 3x^2$;
d) $\frac{1}{4}u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$, $u(x,y,0) = x^2 + y^2$, $u_t(x,y,0) = x + y$;
e) $\frac{1}{25}u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$, $u(x,y,0) = 3(x^2 + y^2)$, $u_t(x,y,0) = 3x + 2y$;
f) $\frac{1}{16}u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$, $u(x,y,z,0) = x^2 - y - z$, $u_t(x,y,0) = x - y + z$.

Zadanie 10*. Znajdź rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego dla równania struny półograniczonej

$$u_{tt} = 9u_{xx}, \quad u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = xe^{-x},\ u(0,t) = 0 \quad \text{dla } x > 0,\ t > 0.$$

Zadanie 11. Znajdź rozwiązanie zagadnienia mieszanego dla równania falowego:

a) $u_{tt} = u_{xx}$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $t \geqslant 0$, $u(x,0) = \sin^3 x$, $u_t(x,0) = \sin 2x$, $u(0,t) = u(\pi,t) = t$; (uwaga: zastosować podstawienie $w(x,t) := u(x,t) - t$);
b) $u_{tt} = u_{xx}$, $0 \leqslant x \leqslant l$, $t \geqslant 0$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 1$ $u(0,t) = u(l,t) = \sin t$; (uwaga: zastosować podstawienie $w(x,t) := u(x,t) - \sin t$);
c) $u_{tt} = u_{xx} + \cos t \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $t \geqslant 0$, $u(x,0) = \sin^2 x$, $u_t(x,0) = \sin^3 x$ $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$;
d*) $u_{tt} = 4u_{xx} + e^{-t}\sin x + 1$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $t \geqslant 0$, $u(x,0) = u_t(x,0) = u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

Zadanie 12. Znajdź ogólną postać funkcji spełniających równanie:

a) $2u_{xx} - 7u_{xy} + 3u_{yy} = 0$;
b) $u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0$;
c) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 4u = 0$ (wskazówka: $\widetilde{u}_{\eta\eta} = \widetilde{u}$ rozwiązujemy jak równanie zwyczajne względem η, czyli mamy $\widetilde{u}(\xi,\eta) = A(\xi)\sin 2\eta + B(\xi)\cos 2\eta$);
d) $u_{yy} - 2u_{xy} + 2u_x - u_y = 0$ (wskazówka: aby rozwiązać równanie $\widetilde{u}_{\xi\eta} - \frac{1}{2}\widetilde{u}_\eta = 0$ całkujemy po η, dostajemy równanie takie jak liniowe niejednorodne zwyczajne względem ξ, więc ostateczne rozwiązanie ma postać $\widetilde{u}(\xi,\eta) = C(\eta)e^{\xi/2} + D(\xi)$);

Zadanie 13. Rozwiąż równania:

a) $u_{xx} + u_{xy} - 6u_{yy} = 0$ jeśli $u(x,-2x) = e^{10x}$, $u(x,3x) = 25x^2 + 1$;
b) $u_{xy} + u_{yy} = 0$ jeśli $u(x,0) = x^5$, $u_y(0,y) = y^3$.

Zadanie 14. Sprowadzając odpowiednią formę kwadratową do postaci kanonicznej i określ typ równania:

a) $u_{xx} = u_{xy} - u_x$;
b) $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + 2u_y = 0$;
c) $4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} - 7u_x + 2u = 0$.