Analiza matematyczna dla IV roku matematyki
29 V 2009 r. Ćwiczenia V: Równanie falowe

Zadanie 22. Niech $u = u(x,t) \in C^3(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+)$ spełnia równanie falowe

$$\Box u = u_{tt} - u_{xx} = 0.$$

Wykaż, że rozwiązaniami równania falowego w $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ są również funkcje:
a) $v(x,t) := u_x(x,t)u_t(x,t)$;
b) $w(x,t) := u_x^2(x,t) + u_t^2(x,t)$.

Zadanie 23. Korzystając ze wzoru d'Alemberta

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[g(x-t) + g(x+t) + \int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy\Big]$$

znajdź rozwiązanie zagadniena Cauchy'ego

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = e^x.$$

Zadanie 24. Niech $g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ będą takimi funkcjami, że szereg

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\Big[\frac{t^{2k}}{(2k)!}\Delta^k g(x) + \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta^k h(x)\Big]$$

jest zbieżny i różniczkowalny wyraz po wyrazie. Wykaż, że $u(x,t)$ spełnia równanie

$$u_{tt} = \Delta u, \quad u(x,0) = g(x), \quad u_t(x,0) = h(x).$$

Zadanie 25. Znajdź rozwiązanie równania falowego z następującymi danymi początkowymi:
a) $g(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2$, $h(x_1,x_2,x_3) = 1$;
b) g, h — harmoniczne;
c) $g(x_1,x_2,x_3) = e^{x_1}$, $h(x_1,x_2,x_3) = e^{-x_3}$.

Zadanie 26. Przedłużając parzyście na $\mathbb{R}_-$ znajdź rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego dla równania struny półograniczonej

$$u_{tt} = 9u_{xx}, \quad u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = x^2,\ u_x(0,t) = 0 \quad \text{dla } x > 0,\ t > 0.$$

Zadanie 27. Korzystając z metody rozdzielenia zmiennych znajdź rozwiązanie zagadnienia mieszanego dla równania falowego

$$\begin{aligned} u_{tt} = c^2 u_{xx} + F, \quad (x,t) \in (0,l) \times \mathbb{R}_+, \quad & u(x,0) = g(x),\ u_t(x,0) = h(x), \\ & u_x(0,t) = \alpha(t),\ u_x(l,t) = \beta(t). \end{aligned}$$

Znajdź konkretne rozwiązanie przyjmując:
$F(x,t) = 1$, $g(x) = \cos\frac{5\pi}{l}x$, $h(x) = 0$, $\alpha(t) = 0$, $\beta(t) = 0$.