**Analiza matematyczna dla IV roku matematyki**
**22 V 2009 r. Ćwiczenia IV: Równanie przewodnictwa cieplnego**

**Zadanie 18.** Wiemy, że rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego dla równania przewodnictwa cieplnego

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

wyraża się wzorem

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, t-\tau) f(y,\tau)\, dy\, d\tau + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-s,t) g(s)\, ds,$$

gdzie funkcja

$$\Phi(x,t) \quad = \quad \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0 \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n, \quad t < 0 \end{cases}$$

jest rozwiązaniem podstawowym równania przewodnictwa cieplnego.

Znajdź rozwiązanie równania przewodnictwa cieplnego

$$u_t(x,y,t) = \Delta u(x,y,t) + xye^{-t} \quad \text{z warunkiem początkowym} \quad u(x,y,0) = x \sin y.$$

**Zadanie 19.** Niech $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fukcja gładka taka, że szereg

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \Delta^k g(x)$$

jest zbieżny w $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ oraz szereg ten można różniczkować wyraz po wyrazie. Wykaż, że funkcja $u(x,t)$ jest rozwiązaniem równania przewodnictwa cieplnego $u_t = \Delta u$ z warunkiem początkowym $u(x,0) = g(x)$.

**Zadanie 20.** Znajdź rozwiązanie równania przewodnictwa cieplnego jeśli warunek początkowy zadany jest wzorem:
a) $g(x,y) = 1 - x^2 - y^2$,
b) $g(x,y) = 1 - (x^2 + y^2)$,
c) $g(x,y) = e^{x+y}$,
d) $g(x)$ — funkcja harmoniczna, gdzie $x \in \mathbb{R}^n$.

**Zadanie 21.** Stosując metodę rozdzielania zmiennych znajdź rozwiązanie następującego zagadnienia mieszanego dla równania przewodnictwa cieplnego:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) & \text{dla} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ t > 0 \\ u(x,0) = \sin^3 x & \text{dla} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{dla} \quad t > 0 \end{cases} \quad .$$