Analiza matematyczna dla IV roku matematyki
7 V 2009 r. Ćwiczenia II: Równanie Laplace'a (ciąg dalszy)

Zadanie 10. Wykaż następującą zasadę maksimum dla zbiorów nieograniczonych: Niech $U = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(0,1)$, $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$, $\Delta u = 0$ w U i $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$. Wówczas $\sup_{x\in U} |u| = \max_{x\in\partial U} |u|$.

Zadanie 11. Niech $U = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$. Wówczas rozwiązanie zagadnienia Dirichleta

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{na} \quad U \\ u = g & \text{na} \quad \partial U \end{cases}$$

dane jest za pomocą wzoru Poissona dla półpłaszczyzny

$$u(x) = u(x_1, ..., x_n) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial U} \frac{g(y)}{|y-x|^n}\, dy.$$

Korzystając z tego wzoru znajdź funkcję harmoniczną i ograniczoną w $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, ciągłą do brzegu $\{y = 0\}$ i taką, że

$$u(x,0) = g(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

Zadanie 12. Korzystając ze wzoru Poissona dla półpłaszczyzny znajdź funkcję harmoniczną i ograniczoną w $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$, ciągłą do brzegu $\{x_3 = 0\}$ i taką, że

$$u(x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2) = \sin x_1.$$

Zadanie 13. Niech $U = B(0,r)$. Wówczas rozwiązanie zagadnienia Dirichleta

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{na} \quad U \\ u = g & \text{na} \quad \partial U \end{cases}$$

dane jest za pomocą wzoru Poissona dla kuli

$$u(x) = u(x_1, ..., x_n) = \frac{r^2 - |x|^2}{n\alpha(n)r} \int_{\partial U} \frac{g(y)}{|y-x|^n}\, dy.$$

Wykaż, że w przypadku $n = 2$ wzór ten przybiera postać

$$u(x,y) = \frac{r^2 - x^2 - y^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(r\cos\alpha, r\sin\alpha)}{x^2 + y^2 + r^2 - 2rx\cos\alpha - 2ry\sin\alpha}\, d\alpha.$$

Zadanie 14. Korzystając ze wzoru Poissona dla kuli znajdź funkcję harmoniczną na $B(0,1)$ i taką, że $u(x,y) = g(x,y) = 2(x^2 + y)$ na $\partial B(0,1)$.