Analiza matematyczna dla IV roku matematyki
24 IV 2009 r. Ćwiczenia I: Równanie Laplace'a

Zadanie 1. Wykaż, że operator Laplace'a $\Delta := \partial_x^2 + \partial_y^2$ w $\mathbb{R}^2$ we współrzędnych biegunowych $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$ przyjmuje postać:

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{\partial_r}{r} + \frac{\partial_\alpha^2}{r^2}.$$

Zadanie 2. Sprawdź, czy funkcje $u_n(r,\alpha) := r^n \cos n\alpha$ i $v_n(r,\alpha) := r^n \sin n\alpha$ dla $n \in \mathbb{N}$ są harmoniczne.

Zadanie 3. Wykazać, że $u(x,y) := \ln\sqrt{x^2+y^2}$ jest harmoniczna w $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Zadanie 4. Znaleźć wszystkie radialne (tzn. zależne tylko od promienia $r = |x|$) funkcje harmoniczne w $\mathbb{R}^n$.

Zadanie 5. Niech $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną. Wtedy oznaczając $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ mamy spełnione równania Cauchy-Riemanna: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$.

a) Wykaż, że $\Delta u = \Delta v = 0$ (mówimy wówczas, że v jest *harmonicznie sprzężone* z u).
b) Wykaż, że u jest harmonicznie sprzężone z $-v$.
c) Znajdź $v(x,y)$ i $f(z)$ jeśli $u(x,y) = x + \frac{x}{x^2+y^2}$.
d) Znajdź $v(x,y)$ i $f(z)$ jeśli $u_x = e^x \cos y$.

Zadanie 6. Wyznacz funkcję harmoniczną $u = u(x,y,z)$, jeśli $u_x = \sinh x \cos z + 2xy$.

Zadanie 7. Wykaż, że funkcja harmoniczna $u = u(x,y,z)$ spełniająca warunek początkowy $u(x,y,0) = g(x,y)$ i $u_z(x,y,0) = h(x,y)$ wyraża się wzorem

$$u(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Big(\frac{z^{2k}}{(2k)!} \Delta^k g(x,y) + \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \Delta^k h(x,y) \Big).$$

Zadanie 8. Znajdź funkcję harmoniczną $u = u(x,y,z)$ spełniającą warunki początkowe $u(x,y,0) = x\sin y$, $u_z(x,y,0) = \cos y$.

Zadanie 9. (Twierdzenie Liouville'a) Korzystając z twierdzenia o wartości średniej dla funkcji harmonicznych wykaż, że każda funkcja harmoniczna i ograniczona w $\mathbb{R}^n$ jest stała.