

Ćwiczenia z Analizy II

Zadania z ciągów i szeregów funkcyjnych oraz szeregów potęgowych

I. Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego:

1. $f_n(x) = \frac{1}{nx}$ dla $0 < x \leq 1$;
2. $f_n(x) = \frac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n} + x^{2n}}}$ dla $x \geq 0$;
3. $f_n(x) = \frac{\ln(2^n + x^n)}{n}$ dla $x \geq 0$;
4. $f_n(x) = (x-1)\arctg x^n$;
5. $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + e^{n(x+1)}}$;
6. $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n + (\frac{x^2}{2})^n}$ dla $x \geq 0$.

II. Zbadaj zbieżność punktową (warunkową i bezwzględną) szeregów:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^p}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} (\frac{x}{2x+1})^n$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^{2n}}{2n} x^n (1-x)^n$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

III. Zbadaj zbieżność jednostajną szeregu:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ na $[-1, 1]$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1})$ na $[-1, 1]$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}$ na $(-2, +\infty)$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4 x^2}$ na $[0, +\infty)$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5 x^2}$ na \mathbb{R} ;
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2 + x^2}}$ na \mathbb{R} .

IV. Zbadać ciągłość funkcji:

1. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$;
2. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2}$.

V. Znaleźć granice:

1. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1})$;
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2 x^2}$.

VI. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego i zbadać zbieżność na końcach przedziału:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}) x^n$ ($a > 0, b > 0$);
4. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1+2 \cos \frac{n\pi}{4})^n}{\ln n} x^n$.

VII. Znaleźć sumę szeregu potęgowego:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} (3n+1)x^n$;
2. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)x^{2n}$.

VIII. Rozwinać w szereg potęgowy funkcje:

1. $\frac{12-5x}{6-5x-x^2}$;
2. $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$;
3. $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$;
4. $\sin^3 x$.

IX. Korzystając z twierdzeń o różniczkowaniu i całkowaniu szeregów potęgowych oblicz:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4^n}$,
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n5^n}$,
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$,
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n} \cdot \frac{3^n}{4^n}$.