

Ćwiczenia z Analizy II
Zadania przygotowawcze do kolokwium nr 2

I. Znaleźć całki nieoznaczone:

1. $\int \frac{x^4 dx}{x^2+1}$; 2. $\int \frac{(1-x) dx}{1-\sqrt[3]{x}}$; 3. $\int \frac{(2^x-5^x) dx}{10^x}$; 4. $\int \frac{\cos 2x dx}{\cos x - \sin x}$; 5. $\int e^{ax} \sin x dx$;
6. $\int x^a \ln x dx$; 7. $\int (x+1) \sin(x^2+2x+2) dx$; 8. $\int \frac{x^3 dx}{(x-1)^{100}}$; 9. $\int x^2 \sqrt[5]{5x^3+1} dx$;
10. $\int x^3 e^{x^2} dx$; 11. $\int \frac{5 \sin x dx}{3-2 \cos x}$; 12. $\int \frac{(x+2) dx}{x(x-2)}$; 13. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$; 14. $\int \frac{(3x-1) dx}{x^2-x+1}$;
15. $\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1} dx$; 16. $\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}$; 17. $\int \frac{dx}{x^8+x^6}$; 18. $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\cos x} dx$;
19. $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^3 x}$; 21. $\int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x + 5}$; 22. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$; 23. $\int x^3 \sqrt{1+x^2} dx$;
24. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-1}}$; 25. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} dx$; 26. $\int \sqrt{x^2-36} dx$.

II. Oblicz granice:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p+2^p+\dots+n^p}{n^{p+1}}$; 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right)$;
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4n} (\operatorname{tg} \frac{\pi}{4n} + \operatorname{tg} \frac{2\pi}{4n} + \dots + \operatorname{tg} \frac{n\pi}{4n})$.

III. Oblicz całki:

1. $\int_0^1 x \sqrt{1+x} dx$; 2. $\int_0^\pi \sin x e^{\cos x} dx$; 3. $\int_0^{\frac{1}{2} \ln 3} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$; 4. $\int_0^\pi e^x \cos^2 x dx$;
5. $\int_{\frac{1}{e}}^2 (x-1) \operatorname{sgn}(\ln x) dx$; 6. $\int_{-2}^2 ||x|-1| dx$; 7. $\int_0^4 \frac{|x-1| dx}{|x-2|+|x-3|}$;
8. $\int_{-\pi}^\pi \left| \sin x + \frac{1}{2} \right| dx$; 9. $\int_{-\pi}^\pi e^{x^2} \sin x dx$; 10. $\int_{-1}^1 \frac{x^5 dx}{\sqrt{3-x^2}}$.

IV. Oblicz średnią wartość funkcji:

1. $f(x) = x^2$ na $[0, 1]$; 2. $f(x) = \sqrt{x}$ na $[0, 100]$;
3. $f(x) = \sin x \sin(x + \varphi)$ na $[0, 2\pi]$.

V. Korzystając z twierdzenia o wartości średniej dla całek oszacować całki:

1. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0,5 \cos x}$; 2. $\int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx$.

VI. Znaleźć pola figur ograniczonych krzywymi o równaniach:

1. $ax = y^2$, $ay = x^2$; 2. $y = x^2$, $x + y = 2$;
3. $y = 2^x$, $y = 2$, $x = 0$; 4. $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ (cissoida);
5. $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$; 6. $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$;
7. $r = a(1 + \cos \varphi)$ (kardioida); 8. $r = 3 + 2 \cos \varphi$.

VII. Zamienić na zmienne biegunowe i obliczyć pole figury:

1. $x^3 + y^3 = 3axy$ (liść Kartezjusza); 2. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

VIII. Znaleźć długość łuku krzywych:

1. $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \ln y$; 2. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$;
3. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$); 4. $r = a(1 + \cos \varphi)$.

IX. Znaleźć objętość brył ograniczonych powierzchniami:

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = \frac{c}{a}x$, $z = 0$;

$$2. x^2 + z^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2;$$

X. Znaleźć objętość brył powstałych w wyniku obrotu figury:

1. $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$ ($0 \leq x \leq a$) wokół osi Ox ;
2. $x = a \sin^3 t, y = b \cos^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) wokół osi Oy ;
3. $r = a(1 + \cos \varphi)$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) wokół osi polarnej.

XI. Znaleźć powierzchnię brył powstałych w wyniku obrotu figury:

1. $y = a \cos \frac{\pi x}{2b}$ ($|x| \leq b$) wokół osi Ox ;
2. $\pm x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ wokół osi Ox ;
3. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ wokół polarnej osi.

XII. Oblicz całki niewłaściwe:

$$1. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9}, \quad 2. \int_0^{\infty} \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}, \quad 3. \int_0^{\infty} e^{-x} \cos x dx, \quad 4. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}, \quad 5. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{1-\sin x}}.$$

XIII. Zbadaj zbieżność całek niewłaściwych:

$$1. \int_0^{\infty} e^{-x} \sin^2 x dx, \quad 2. \int_2^{\infty} \frac{x dx}{x^2 - \arctg x}, \quad 3. \int_0^{\infty} \frac{(2^x+1) dx}{4^x+1}, \quad 4. \int_1^{\infty} \frac{e^{3x} dx}{3e^{4x}-5},$$

$$5. \int_{\pi}^{+\infty} \frac{x dx}{x^2 + \cos x}, \quad 6. \int_0^{\infty} \frac{\arctg x dx}{x+1}, \quad 7. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{tg} x dx, \quad 8. \int_0^1 \frac{(1+\sin x) dx}{\sqrt{x}},$$

$$9. \int_0^1 \frac{e^x dx}{(x-1)^2}, \quad 10. \int_0^1 \frac{(e^x-1) dx}{x^4}, \quad 11. \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\cos x}, \quad 12. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{x-1}}, \quad 13. \int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x-1}.$$

XIV. Zbadaj zbieżność i zbieżność bezwzględną całek niewłaściwych:

$$1. \int_0^{\infty} x \cos x dx, \quad 2. \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x dx}{x+100}, \quad 3. \int_0^{\infty} x^p \sin(x^q) dx,$$

$$4. \int_1^{\infty} \frac{\sin^3 x dx}{x^2}, \quad 5. \int_2^{\infty} \frac{x \cos x dx}{(x^2-1)^3}.$$

XV. Korzystając z kryterium całkowego zbadaj zbieżność podanych szeregów:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}, \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^{n^3}}, \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}, \quad 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}, \quad 5. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}.$$