Ćwiczenia z Analizy II
Zadania przygotowawcze do kolokwium nr 1

I. Zbadaj, czy istnieje pochodna funkcji f w punkcie x_0:

1. $f(x) = \begin{cases} x\operatorname{arctg}\frac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0;$
2. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x \leqslant 2 \\ 2^x & \text{dla} \quad x > 2 \end{cases}, \quad x_0 = 2;$
3. $f(x) = \begin{cases} \frac{|x+1|}{\ln|x+1|} & \text{dla} \quad x \neq -1 \\ 0 & \text{dla} \quad x = -1 \end{cases}, \quad x_0 = -1;$
4. $f(x) = |x-\pi|^3 \sin x, \quad x_0 = \pi.$

II. Znajdź parametry a, b, dla których podane funkcje mają pochodne na $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = \begin{cases} ae^x + be^{-x} & \text{dla} \quad x < 0 \\ \cosh 2x & \text{dla} \quad x \geqslant 0 \end{cases};$
2. $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla} \quad x \leqslant 0 \\ a\sin x + b\cos x & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}.$

III. Oblicz pochodne funkcji:

1. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$; 2. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$; 3. $f(x) = \sin(\sin(\sin x)))$;
4. $f(x) = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1})$ 5. $f(x) = x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$;
6. $f(x) = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$; 7. $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$;
8. $f(x) = \arcsin(\sin x^2) + \arccos(\cos x^2)$.

IV. Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej oblicz:

1. $(f^{-1})'(y)$ dla: $f(x)$ równego: a) $\sinh x$, b) $\cosh x$, c)$\operatorname{tgh} x$, d) $\operatorname{ctgh} x$, e)x^3;
2. $(f^{-1})'(0)$ dla $f(x) = x + \sin x$; 3. $(f^{-1})'(2)$ dla $f(x) = e^x + e^{5x}$;
4. $(f^{-1})'(4)$ dla $f(x) = x^x$.

V. Zakładając, że f i g są dwukrotnie różniczkowalne oblicz y' i y'', jeśli:

1. $y = \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$; 2. $y = \sqrt[f(x)]{g(x)}$; 3. $y = f(\sin^2 g(x)) + f(\cos^2 g(x))$.

VI. Zbadaj, czy istnieje $f''(x_0)$ dla:

1. $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{dla} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{dla} \quad x \geqslant 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0;$
2. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x - x^2}x & \text{dla} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{dla} \quad x > 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1.$

VII. Napisz równanie stycznej do wykresu $f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$, jeśli:

1. $f(x) = \arcsin\frac{x}{2}$, $x_0 = 1$; 2. $f(x) = \sqrt[x]{x}$, $x_0 = e$; 3. $f(x) = \ln(x^2 + e)$, $x_0 = 0$.

VIII. Oblicz kąty, pod jakimi przecinają się wykresy podanych funkcji:

1. $f(x) = 4 - x$, $g(x) = 4 - \frac{x^2}{2}$, $x > 0$; 2. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$.

IX. Sprawdź, czy podane funkcje spełniają założenia twierdzenia Rolle'a na przedziale $[-1, 1]$:

1. $f(x) = |\cos\frac{\pi x}{2}|$; 2. $f(x) = 1 - |x|$; 3. $f(x) = \arcsin|x|$; 4. $f(x) = \sqrt{|x|} - 1$.

X. Zastosuj twierdzenie Lagrange'a do podanych funkcji na wskazanych przedziałach. Wyznaczyć odpowiednie punkty:

1. $f(x) = e^x$ na $[0, 2]$; 2. $f(x) = \frac{1}{1+x}$ na $[0, 3]$; 3. $f(x) = \sqrt{3}x^3 + 3x$ na $[0, 1]$.

XI. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a wykaż, że:

1. $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leqslant |x - y|$; 2. $|\cos^{100} x - \cos^{100} y| \leqslant 100|x - y|$;
3. $x \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ dla $0 \leqslant x < 1$; 4. $e^x > ex$ dla $x > 1$.

XII. Wykaż tożsamości:

1. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$ dla $x \in \mathbb{R}$; 2. $\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 2\operatorname{arctg} x$ dla $x \in (-1, 1)$;
3. $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$ dla $x \in (-1, \infty)$;
4. $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ dla $x \in (-1, 1)$.

XIII. Znaleźć przedziały monotoniczności podanych funkcji:

1. $f(x) = e^x(x + 1)$; 2. $f(x) = \frac{x^3}{3-x^2}$; 3. $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$; 4. $f(x) = x - 3\sqrt[3]{x}$.

XIV. Znaleźć kresy funkcji:

1. $f(x) = \frac{10}{1+\sin^2 x}$ na $\mathbb{R}$; 2. $f(x) = e^x \sin x$ na $\mathbb{R}$;
3. $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$ na $[-1, 1]$; 4. $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$ na $(0, \infty)$.

XI. Znaleźć wzory ogólne na pochodną n-tego rzędu podanych funkcji:

1. $f(x) = \cos \frac{x}{3}$; 2. $f(x) = 2^{-x}$; 3. $f(x) = \frac{x}{e^x}$.

XII. Napisać wzory Taylora dla podanych funkcji f, punktów x_0 oraz n:

1. $f(x) = x^3$, $x_0 = -1$, $n = 4$; 2. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x_0 = 1$, $n = 2$.

XIII. Napisać wzór Maclaurina dla podanych funkcji z resztą n-tego rzędu:

1. $f(x) = xe^x$; 2. $f(x) = \sqrt{1 + x}$.

XIV. Określić przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia podanych funkcji:

1. $f(x) = xe^{-x}$; 2. $f(x) = \ln(1 + x^2)$; 3. $f(x) = \sin x + \frac{1}{8} \sin 2x$.

XV. Korzystając z reguły de l'Hospitala oblicz granice:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$; 5. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$; 6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$;
7. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x})$; 8. $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{ctg} 3x$; 9. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$;
10. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}$; 11. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\cos x-\cos a}{x-a}$; 12. $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ctg} x}$;
13. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{x}$; 14. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+2^x)}{3^x}$; 15. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$;
16. $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{1+x}{2+x})^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$; 17. $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{\cos x}{\cos 2x})^{\frac{1}{x^2}}$; 18. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1 - 2x}$;
19. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}$; 20. $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(1 + 2^x) \ln(1 + \frac{3}{x})$; 21. $\lim\limits_{x\to 1} (1 - x) \log_x 2$.