Zastosowanie pochodnych, wzór Taylora, funkcje klasy C^∞

Zadanie 1. Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne podanych funkcji:

$$a)\ f(x) = x^x \quad \text{dla} \quad x > 0 \qquad b)\ f(x) = -x(\ln x + \frac{1}{2}) \quad \text{dla} \quad x \in (0,1)$$

Zadanie 2. Określić przedziały wypukłości i wklęsłości oraz punkty przegięcia podanch funkcji:

$$a)\ f(x) = (1+x^2)e^2 \qquad b)\ f(x) = x^2 \ln x$$

Zadanie 3. Wykazać nierówności:

$$a)\ \frac{1}{2}(x^n + y^n) > (\frac{x+y}{2})^n \quad \text{dla} \quad x > 0,\ y > 0,\ x \neq y,\ n > 1$$

$$b)\ \frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}} \quad \text{dla} \quad x \neq y$$

$$c)\ x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2} \quad \text{dla} \quad x, y > 0, x \neq y$$

Zadanie 4. Napisać wzór Taylora z resztą Lagrange'a dla podanej funkcji, wskazanego punktu oraz n:

$$a) f(x) = \frac{x}{x-1},\ x_0 = 2,\ n = 3 \qquad b) f(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 1,\ n = 3$$

$$c) f(x) = \sin 2x,\ x_0 = \pi,\ n = 3 \qquad d) f(x) = \frac{1}{x},\ x_0 = 2,\ n = 3$$

$$e) f(x) = \ln x,\ x_0 = e,\ n = 4 \qquad f) f(x) = \sqrt[5]{1+x},\ x_0 = -2,\ n = 3$$

Zadanie 5. Napisać wzór Maclaurina dla podanej funkcji:

$$a) f(x) = \sin 2x, \qquad b) f(x) = xe^x, \qquad c) f(x) = \frac{x}{e^x}$$

Zadanie 5. Wykazać nierówność: $\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$.

Zadanie 6. Wykazać, że funkcja $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{dla} \quad x > 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$ jest klasy C^∞.

Zadanie 7. Znaleźć funkcję g klasy C^∞ taką, że $g = 0$ poza pewnym przedziałem (a,b) oraz $g > 0$ na (a,b).