Twierdzenie Rolle'a i Lagrange'a, reguła de L'Hospitala

Zadanie 1. Załóżmy, że $f \in C([a,b])$, $a > 0$, jest funkcją różniczkowalną w przedziale otwartym (a,b) spełniającą warunek

$$\frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b}.$$

Wykazać, że istnieje $x_0 \in (a,b)$ takie, że $x_0 f'(x_0) = f(x_0)$.

Zadanie 2. Załóżmy, że $f \in C([a,b])$ jest funkcją różniczkowalną w przedziale otwartym (a,b) spełniającą warunek $f^2(b) - f^2(a) = b^2 - a^2$. Wykazać, że w przedziale (a,b) istnieje co najmniej jeden pierwiastek równania $f'(x)f(x) = x$.

Zadanie 3. Niech $f, g \in C([a,b])$ będą funkcjami nie zerujacymi się na przedziale $[a,b]$ i mającymi pochodne w (a,b). Załóżmy ponadto, że $f(a)g(b) = f(b)g(a)$. Dowieść, że istnieje $x_0 \in (a,b)$ takie, że

$$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \frac{g'(x_0)}{g(x_0)}.$$

Zadanie 4. Załóżmy, że $f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f' \in C([a,b])$, jest funkcją mającą drugą pochodną f'' w przedziale (a,b). Załóżmy ponadto, że $f(a) = f'(a) = f(b) = 0$. Dowieść, że istnieje $x_0 \in (a,b)$ spełniające warunek $f''(x_0) = 0$.

Zadanie 5. Wykazać, że równanie $x^{13} + 7x^3 - 5 = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty.

Zadanie 6. Niech $f \in C([0,2])$ i niech $f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(2) = 2$. Załóżmy ponadto, że f'' istnieje na $(0,2)$. Wykazać, że istnieje $x_0 \in (0,2)$ takie, że $f''(x_0) = 0$.

Zadanie 7. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a uzasadnić podane nierówności:

$$a)\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x \quad \text{dla } x > 0; \qquad\qquad b) e^x > 1 + x \quad \text{dla } x > 0.$$

Zadanie 8. Obliczyć podane granice:

$$a) \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}; \qquad b) \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\ln \sin x}; \qquad `c) \lim_{x\to 1^-} \frac{2^x - 2^{2-x}}{(x-1)^2};$$

$$d) \lim_{x\to -\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1); \qquad e) \lim_{x\to\infty} \frac{\pi - 2\mathrm{arctg} x}{\ln(x+1) - \ln x}; \qquad f) \lim_{x\to 1^-} \cos\frac{\pi}{2x} \ln(1-x);$$

$$g) \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x} - \frac{1}{x^2}\right); \qquad h) \lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}; \qquad i) \lim_{x\to 1-} (1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}};$$

$$j) \lim_{x\to\infty} \left(\cos\frac{1}{x}\right)^x; \qquad k) \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\sin x)^{\mathrm{tg}\, x}; \qquad l) \lim_{x\to\infty} (x+1)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}.$$