

Zadania z analizy matematycznej zestaw VIII

Zadanie 1. Korzystając z definicji pochodnej policzyć pochodną funkcji $f(x)$ dla:

a) $f(x) = x^3$ b) $f(x) = \sqrt{x}$ c) $f(x) = \sin x$ d) $f(x) = \log x$.

Zadanie 2. Korzystając z definicji pochodnej zbadać, czy istnieją pochodne podanych funkcji w $x_0 = 0$

a) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = x|x|$.

Zadanie 3. Badając pochodne jednostronne zbadać, czy istnieją pochodne we wskazanych punktach:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{dla } x \geq 1 \\ 3x^2 & \text{dla } x < 1 \end{cases}$ dla $x_0 = 1$

b) $f(x) = |x|$ dla $x_0 = 0$

c) $f(x) = x^2 + |x^2 - 4|$ dla $x_0 = 2$

Zadanie 4. Dla jakich paramenrów a i b funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{dla } x \leq 2 \\ ax + b & \text{dla } x > 2 \end{cases}$$

ma pochodne na \mathbb{R} ?

Zadanie 5. Oblicz pochodną funkcji f , gdy:

a) $f(x) = x^4$,

b) $f(x) = \sqrt[5]{x}$,

c) $f(x) = \frac{1}{x^3}$,

d) $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$,

e) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$,

f) $f(x) = 2$,

g) $f(x) = 3x - 7$,

h) $f(x) = 5x^2 - 3x + 2 + \sqrt{3}$,

i) $f(x) = 3x^8 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{7}$,

j) $f(x) = x^{11} - 6x^5 + 2\sqrt{x} + \frac{3}{x}$,

k) $f(x) = \frac{5}{x} - \frac{3}{x^3} + \frac{11}{x^5} + 9$,

l) $f(x) = (x + \frac{1}{x})\sqrt{x}$,

m) $f(x) = (x + 4)(x^2 + 5x + 7)$,

n) $f(x) = (1 + \sqrt{x})(2 - x)$,

o) $f(x) = (x^3 + 3x + 7)(x^2 + \frac{1}{x} + 15)$,

p) $f(x) = (x^{11} - 6x^5 + 2\sqrt{x})(x + 6)$,

r) $f(x) = (\frac{3}{x} - \frac{8}{x^2} + \frac{4}{x^6} + 9)(3x + 8)$,

s) $f(x) = \frac{x}{x-3}$,

t) $f(x) = \frac{1-3x}{2x+7}$,

u) $f(x) = \frac{3x-8}{2x^2+9}$,

w) $f(x) = \frac{x^2+3x}{5x+1}$,

y) $f(x) = \frac{2x^2+5x}{3x^2+5}$,

z) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{5x+2}$.

Zadanie 6. Oblicz pochodną funkcji h , gdy:

a) $h(x) = (3x + 7)^3$,

b) $h(x) = (2x^2 + 4x + 1)^5$,

c) $h(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$,

d) $h(x) = \sqrt{3x + \frac{1}{x} + \sqrt{x}}$,

e) $h(x) = (\frac{2x+5}{3x+5})^4$,

f) $h(x) = (\sqrt{x}(5x + 2))^{-1/3}$,

g) $h(x) = e^{x^2+3x+7}$,

h) $h(x) = 2^x + x3^x$,

i) $h(x) = \ln(x^2 + 4x + 5)$,

j) $f(x) = e^{x^2+4x-1}$,

k) $f(x) = \frac{e^x}{x^2+4x-3}$.

Zadanie 7. Oblicz pochodną funkcji h , gdy:

- a) $h(x) = \sin^2 x$,
- b) $h(x) = e^{\cos \sqrt{x}}$,
- c) $h(x) = \operatorname{tg}(x + x^5)$,
- d) $h(x) = \frac{1}{\cos(\sin x)}$,
- e) $h(x) = \frac{\sin^x - \cos x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}$,
- f) $h(x) = (\sqrt{\sin x})^{-1/3}$,
- g) $h(x) = e^{\sin x + \cos x}$.

Zadanie 8. Oblicz pochodną funkcji g , gdy:

- a) $g(x) = \arcsin x$,
- b) $g(x) = \arccos x$,
- c) $g(x) = \operatorname{arctg} x$,
- d) $h(x) = \operatorname{arcctg} x$,
- e) $h(x) = \ln x$,
- f) $h(x) = \log_a x$.

Zadanie 9. Oblicz pochodną funkcji h , gdy:

- a) $h(x) = x^x$,
- b) $h(x) = x^{\sin x}$,
- c) $h(x) = 2^{x \sin x}$,
- d) $h(x) = \log_x 7$,
- e) $h(x) = x^{x^2}$,
- f) $h(x) = \ln(\ln \frac{x}{3} + \operatorname{tg} x)$,
- g) $h(x) = e^{\operatorname{arctg} \sqrt[4]{x}}$.

Zadanie 10. Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej obliczyć:

- a) $(f^{-1})'(e + 1)$ dla $f(x) = x + \ln x$,
- b) $(f^{-1})'(y)$ dla $f(x) = 3^{-x}$,
- c) $(f^{-1})'(1)$ dla $f(x) = \cos x - 3x$.

Zadanie 11. Zakładając, że f i g mają pochodne właściwe, obliczyć pochodne funkcji:

- a) $\log_{f(x)} g(x)$
- b) $\ln(f(x)^{g(x)} + 1)$.